**Technische Universiteit Delft**
**Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica**
**Delft Institute of Applied Mathematics**

# Nulpunten van de Riemann-$\zeta$-functie

## (Engelse Titel: Zeros of the Riemann-$\zeta$ function)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

**BACHELOR OF SCIENCE**
**in**
**TECHNISCHE WISKUNDE**

**door**

**Carel Wagenaar**

**Delft, Nederland**
**Augustus 2017**

**BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE**

**"Nulpunten van de Riemann-$\zeta$-functie"**
**(Engelse titel: "Zeros of the Riemann-$\zeta$ function")**

Carel Wagenaar

**Technische Universiteit Delft**

**Begeleider**

Dr.ir. W.G.M. Groenevelt

**Overige commissieleden**

Dr. H.M. Schuttelaars

Drs. E.M van Elderen

. . .

. . .

Augustus, 2017

Delft

## Inhoudsopgave

## Inleiding

In het jaar 2000 stelde het Clay Mathematic Institute \$7.000.000 beschikbaar voor zeven moeilijke wiskundige problemen. Een persoon die één van deze *millenniumprijsproblemen* zou oplossen zou worden beloond met een bedrag van \$1.000.000. Het is nu 2017 en pas één van deze problemen is opgelost. In 2010 kreeg de Russische wiskunde Grigori Perelman de miljoen dollar aangeboden voor het oplossen van het vermoeden van Poincaré; maar hij weigerde de prijs. Hij was niet geïnteresseerd in geld en beroemdheid.

Eén van de andere problemen is de *Riemann-hypothese*. Deze hypothese heeft alles te maken met de Riemann-$\zeta$-functie. De hypothese stelt dat het reële deel van *alle* nulpunten van deze complexe functie $\frac{1}{2}$ is. De eenvoud van het begrijpen van deze vraag staat, zoals wel eens vaker in de wiskunde, in contrast met de complexiteit van het oplossen van het probleem.

Riemann formuleerde deze hypothese en meer in zijn 10 pagina's tellende artikel "*Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*"(Nederlands: "*Over het aantal priemgetallen beneden een gegeven grootte*"). Hoewel dit artikel maar 10 pagina's heeft, wordt het gezien als één van de meest invloedrijke wiskundige artikelen uit de geschiedenis. De naam van dit artikel verklapt al iets over wat de $\zeta$-functie zo bijzonder maakt. Deze complexe functie heeft namelijk een link met de getaltheorie, iets unieks in de wiskunde. De verdeling van de priemgetallen heeft namelijk een diepe connectie met de posities van de nulpunten van de $\zeta$-functie. En niet alleen in de getaltheorie, maar ook in talloze andere gebieden van de wiskunde en natuurkunde, zoals bijvoorbeeld de quantum mechanica, komt de $\zeta$-functie terug.

Dit verslag zal echter vooral gericht zijn op de complexe analyse. Na deze inleiding zal ik in hoofdstuk 1 de $\zeta$-functie definiëren en wat basisaspecten van deze functie noemen. Vervolgens zal ik in hoofdstuk 2 laten zien waar deze functie goed gedefiniëerd is. Daarna zal ik in hoofdstuk 3 alternatieve schrijfwijzen van de $\zeta$-functie laten zien die vaak langs komen als het over de $\zeta$ functie gaat. In hoofdstuk 4 zal ik laten zien in welk gebied nulpunten van de $\zeta$-functie kunnen liggen, de zogehete kritieke strip, en ook bewijzen van welke orde grootte het aantal nulpunten in deze strip is. In hoofdstuk 5 zal ik vervolgens een mooi resultaat laten zien van de Britse wiskundige Hardy. Dit resultaat zegt dat er oneindig veel nulpunten van de $\zeta$-functie reëel deel $\frac{1}{2}$ hebben. Als laatste is er nog een nawoord.

Hoofdstukken 1 tot en met 3 van dit verslag laten resultaten zien van de $\zeta$-functie die nodig zijn voor iedereen die zich in de $\zeta$-functie wil verdiepen. Hoofdstukken 4 en 5 laten wat specifiekere resultaten zien met betrekking tot de nulpunten van de $\zeta$-functie. Ik wens je veel plezier met het lezen van dit verslag over een klassiek en wiskundig erg mooi onderwerp.

## 1. Introductie $\zeta$-functie

De Riemann-$\zeta$-functie is een complexe functie. Je geeft de $\zeta$-functie een complex getal en je krijgt een complex getal terug. De $\zeta$-functie is als volgt gedefinieerd:

**Definitie 1.1.** *Voor $s \in \mathbb{C}$ met $\mathrm{Re}(s) > 1$ definiëren we:*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Een speciaal geval van de $\zeta$-fucntie is als we $s = 2$ invullen. We krijgen dan het beroemde Bazel-probleem,

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ \dots,$$

welke Euler oploste door te laten zien dat deze reeks convergeert naar $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Een eerste belangrijke vraag is wanneer deze reeks convergeert. We claimen dat deze functie analytisch is in het halfvlak $D := \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\}$. We weten dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ en $s \in \mathbb{C}$ de functie: $f_n(s) = \frac{1}{n^s}$ analytisch is op $D$. De vraag is nu voor welke $s$ de som van deze functies analytisch is. Neem $s \in \mathbb{C}$ met $\mathrm{Re}(s) > 1$. Dan is er een $\delta > 0$ waarvoor geldt: $\mathrm{Re}(s) \geq 1 + \delta > 1$. Voor $|f_n(s)|$ geldt dan

$$|f_n(s)| = \left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{|n^s|} = \frac{1}{n^{\mathrm{Re(s)}}} \leq \frac{1}{n^{1+\delta}} \ .$$

We weten dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$ convergeert als $1 + \delta > 1$. Aangezien $\delta > 0$, convergeert $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^s}\right|$ normaal in het halfvlak $D$. Hieruit volgt dat $\zeta(s)$ analytisch is in dit halfvlak $D$.

Merk op dat in het geval $\mathrm{Re}(s) = 1$ de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathrm{Re(s)}}}$ divergeert, aangezien dit de harmonische reeks is. Als $\mathrm{Re}(s) < 1$ dan divergeert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}}$ natuurlijk ook. Neem bijvoorbeeld $s = -1$, dan

$$\zeta(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n \ ,$$

welke natuurlijk enorm divergeert.
We weten dus nog niet wat de $\zeta$-functie doet op het andere halfvlak $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) \leq 1\}$, laat staan of $\zeta$ daar bestaat. We zullen in volgende hoofdstukken zien dat $\zeta$ daar bestaat en dat er enorm veel over te zeggen valt. Ik zal dit hoofdstuk afsluiten met een eigenschap van $\zeta$ die later een aantal keer terug zal komen:

**Lemma 1.2.** *Voor $s \in \mathbb{C}$ met $\mathrm{Re}(s) > 1$ geldt: $\overline{\zeta(s)} = \zeta\left(\overline{s}\right)$.*

*Bewijs.* Als $\mathrm{Re}(s) > 1$ geldt Definitie 1.1 van de $\zeta$-functie. Als we deze definitie gebruiken en vervolgens rekenregels voor geconjugeerden gebruiken (bijlage B) vinden we het gevraagde, namelijk

$$\overline{\zeta(s)} = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}} \underbrace{=}_{*} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{n^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\overline{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\overline{s}}} = \zeta\left(\overline{s}\right).$$

Waarbij we bij * geconjugeerde en oneindige som mogen omwisselen aangezien de reeks convergent is. $\square$

## 2. De Analytische Voortzetting en Functionaalvergelijking

We weten hoe $\zeta$ is gedefinieerd op het halfvlak $D := \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\}$. We zijn echter ook geïnteresseerd in wat $\zeta$ in het andere halfvlak doet. Maar we weten niet óf en, zo ja, hoe $\zeta$ is gedefinieerd in dat andere halfvlak. Een eigenschap van analytische functies in de complexe analyse is dat je deze vaak kan voortzetten naar een gebied waar de functie oorspronkelijk niet gedefinieerd is, bijvoorbeeld omdat een machtreeks daar niet meer convergeert zoals bij de $\zeta$-functie. Soms is er dan een andere representatie die op het oorspronkelijke gebied gelijk is aan de functie, en op een nog groter gebied gedefinieerd is. Wat het extra bijzonder maakt is dat deze voortzetting van een analytische functie uniek is. In dit hoofdstuk zullen we gaan kijken naar de analytische voortzetting van $\zeta$ en op basis daarvan een functionaalvergelijking voor de $\zeta$-functie gaan afleiden.

### 2.1. **Analytische Voortzetting.**

We zullen dus als eerste de analytische voortzetting van $\zeta$ afleiden. We gaan dit aanpakken door voor een functie die gerelateerd is aan de $\zeta$-functie een integraalvorm af te leiden en vervolgens te laten zien dat deze integraal op bijna het hele complexe vlak convergeert. De functie waarvoor we een integraalvorm gaan afleiden is

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s),$$

waarbij $\Gamma$ de gammafunctie is. Van deze functie staat een overzicht in bijlage A.

Om de afleiding overzichtelijk te houden zal ik eerst een paragraaf wijden aan definities en lemma's die nodig zijn voor het bewijs van de analytische voortzetting. De bewijzen van deze lemma's zijn vooral technisch. Vervolgens kunnen we in de paragraaf erna overzichtelijker door het bewijs van de analytische voortzetting heen gaan.

#### 2.1.1. *Benodigde definities en lemma's.*

We beginnen dus met een aantal definities en lemma's. Als eerste introduceren we de $\theta$-functie.

**Definitie 2.1.** *Voor* $s \in \mathbb{C}$ *met* $\mathrm{Re}(s) > 0$ *definiëren we:*

$$\theta(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s}.$$

Deze reeks convergeert absoluut voor elke vaste $s \in \mathbb{C}$ met $\mathrm{Re}(s) > 0$ aangezien $e^{-n^2}$ heel snel naar 0 gaat. Dit is makkelijk te laten zien met de integraaltest voor reeksen met bijvoorbeeld $e^{-sx}$.

We hebben de volgende eigenschap nodig van deze functie:

**Lemma 2.2.** $\theta(s^{-1}) = s^{\frac{1}{2}}\theta(s)$, *waarbij de wortel de hoofdtak*[1] *van de wortel is.*

[1] Dat wil zeggen $(a+bi)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|a+bi|}e^{i\arg(a+bi)}$, met $-1\frac{1}{2}\pi < \arg(a+bi) \leq \frac{1}{2}\pi$

Het bewijzen van deze eigenschap is erg technisch. Sommige bewijzen maken bijvoorbeeld gebruik van fouriertransformaties. Ik zal deze eigenschap in dit verslag niet bewijzen, maar de geïnteresseerden verwijs ik graag door naar [10].

We introduceren nu de $\omega$-functie, welke veel lijkt op de $\theta$-functie. Het enige verschil is dat deze $\omega$-functie alleen sommeert over positieve $n$.

**Definitie 2.3.** *Voor $s \in \mathbb{C}$ met $\mathrm{Re}(s) > 0$ definiëren we:* $\omega(s) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 s}$.

We hebben straks een aantal eigenschappen van deze functie nodig. We moeten weten dat deze goed gedefinieerd is, van welke orde grootte $\omega(s)$ is en we hebben een uitdrukking voor $\omega(s^{-1})$ nodig. Deze drie eigenschappen staan in het volgende lemma:

**Lemma 2.4.** *Voor $s \in \mathbb{C}$ met $\mathrm{Re}(s) > 0$ geldt:*

*i) De reeks* $\omega(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 s}$ *convergeert absoluut.*

*ii) Voor alle $s \in \mathbb{C}$ met $\mathrm{Re}(s) \geq 1$ en $k \in \mathbb{N}$ is er een constante $C \in \mathbb{R}$ zo dat* $\left|\omega^{(k)}(s)\right| < Ce^{-\mathrm{Re}(s)}$.

*iii)* $\omega(s^{-1}) = s^{\frac{1}{2}}\omega(s) + \frac{1}{2}(s^{\frac{1}{2}} - 1)$

*Bewijs.* i). Dit is net als bij de reeks voor $\theta(s)$ van Definitie 2.1 eenvoudig te laten zien met de integraaltest voor reeksen;

$$\begin{aligned}
\left|\int_1^{\infty} e^{-\pi s y^2} \mathrm{d}y\right| &\leq \int_1^{\infty} \left|e^{-\pi s y^2} \mathrm{d}y\right| = \int_1^{\infty} e^{-\pi \mathrm{Re}(s) y^2} \mathrm{d}y \\
&\leq \int_1^{\infty} e^{-\pi \mathrm{Re}(s) y} \mathrm{d}y = -\frac{1}{\pi \mathrm{Re}(s)} \left[e^{-\pi \mathrm{Re}(s) y}\right]_1^{\infty} \\
&= \frac{1}{\pi \mathrm{Re}(s)} \ .
\end{aligned}$$

ii). Neem $s \in \mathbb{C}$ met $\mathrm{Re}(s) > 0$ en $k \in \mathbb{N}$ willekeurig. We gaan eerst kijken naar de $k$-de afgeleide van $\omega$. Als we elke term van de som $k$ keer differentiëren krijgen we

$$\omega^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\pi n^2)^k e^{-\pi n^2 s}.$$

Neem nu $s \in \mathbb{C}$ met $\mathrm{Re}(s) > 1$ willekeurig, dan geldt

$$\begin{aligned}
|\omega^{(k)}(s)| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} (-\pi n^2)^k e^{-\pi n^2 s}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\pi n^2)^k e^{-\pi n^2 \mathrm{Re}(s)} \\
&= e^{-\mathrm{Re}(s)} \sum_{n=1}^{\infty} (\pi n^2)^k e^{-\pi n^2 \mathrm{Re}(s) + \mathrm{Re}(s)} = e^{-\mathrm{Re}(s)} \sum_{n=1}^{\infty} (\pi n^2) e^{-\mathrm{Re}(s)(\pi n^2 - 1)} \\
&\underbrace{\leq}_{\mathrm{Re}(s) \geq 1} e^{-\mathrm{Re}(s)} \sum_{n=1}^{\infty} (\pi n^2)^k e^{-(\pi n^2 - 1)} = e^{-\mathrm{Re}(s)} e \sum_{n=1}^{\infty} (\pi n^2)^k e^{-\pi n^2} \\
&= e^{-\mathrm{Re}(s)} e |\omega^{(k)}(1)|,
\end{aligned}$$

waarbij de absolute waarde nodig is bij $|\omega^{(k)}(1)|$ omdat als $k$ oneven is er een minteken staat voor de som. Via de integraaltest gecombineerd met Lemma 2.5 weten we dat $\omega^{(k)}(1)$ goed gedefinieerd is, zeg $\omega^{(k)}(1) = C'$. Neem nu $C = eC'$, dan vinden we

$$|\omega^{(k)}(s)| \leq e^{-x} ew^{(k)}(1) = e^{-x} eC' = Ce^{-x}.$$

iii). Om dit te bewijzen zullen we $\omega(s)$ omschrijven naar $\theta(s)$ en vervolgens Lemma 2.2 toepassen. We kijken eerst hoe $\theta(s)$ en $\omega(s)$ met elkaar zijn verbonden;

$$\begin{aligned} \omega(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{2}(2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 s}) \\ &= \frac{1}{2}(\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} - 1) = \frac{1}{2}\theta(s) - \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dit is equivalent met

$$\theta(s) = 2\omega(s) + 1. \tag{2.2}$$

Als we nu $s^{-1}$ invullen dan vinden we

$$\begin{aligned} \omega(s^{-1}) &\underbrace{=}_{(2.1)} \frac{1}{2}\theta(s^{-1}) - \frac{1}{2} \underbrace{=}_{\text{Lemma 2.2}} \frac{1}{2}s^{\frac{1}{2}}\theta(s) - \frac{1}{2} \underbrace{=}_{(2.2)} \frac{1}{2}s^{\frac{1}{2}}(2\omega(s)+1) - \frac{1}{2} \\ &= s^{\frac{1}{2}}\omega(s) + \frac{1}{2}(s^{\frac{1}{2}} - 1). \end{aligned}$$

□

Het volgende lemma dat we nodig hebben gaat over de integraal $\int_1^\infty x^a e^{-x} \mathrm{d}x$, waarbij $a \in \mathbb{R}$. We gaan laten zien dat deze integraal convergeert.

**Lemma 2.5.** *Voor $a \in \mathbb{R}$ geldt $\int_1^\infty x^a e^{-x} \mathrm{d}x < \infty$.*

*Bewijs.* Neem $a \in \mathbb{R}$ willekeurig. Als $a \leq 0$ dan geldt voor $x \in [1, \infty]$ dat $x^a \leq 1$. Dit geeft

$$\int_1^\infty x^a e^{-x} dx \leq \int_1^\infty e^{-x} \mathrm{d}x = -\left[e^{-x}\right]_0^\infty = 1.$$

Dus als $a \leq 0$, dan geldt $\int_1^\infty x^a e^{-x} \mathrm{d}x < \infty$.

Dan moeten we nu nog laten zien wat er gebeurt als $a > 0$. Hiervoor gaan we inductie gebruiken. Onze inductie veronderstelling (IV) zal zijn:

$$\text{Voor } n \in \mathbb{N}_0 \text{ geldt: } \int_1^\infty x^a e^{-x} \mathrm{d}x < \infty \text{ waarbij } a \in [n-1, n].$$

Als $n = 0$ geldt $a \in [-1, 0]$. We zagen al dat $\int_1^\infty x^a e^{-x} \mathrm{d}x < \infty$ als $a \leq 0$, dus de IV is waar voor $n = 0$.
Neem nu aan dat de IV geldt voor $n$ willekeurig. Dan geldt voor $n + 1$ dat $a \in [n, n+1]$. De IV partieel integeren geeft nu

$$\int_1^\infty x^a e^{-x} \mathrm{d}x = \left[-x^a e^{-x}\right]_1^\infty + a\int_1^\infty x^{a-1} e^{-x} \mathrm{d}x = e^{-1} + a\int_1^\infty x^{a-1} e^{-x} \mathrm{d}x.$$

Aangezien $a-1 \in [n-1, n]$ volgt uit de IV dat $\int_1^\infty x^{a-1}e^{-x}\mathrm{d}x < \infty$. Dus ook voor $n+1$ geldt $\int_1^\infty x^a e^{-x}\mathrm{d}x < \infty$, waarbij $a \in [n, n+1]$.

Uit het principe van volledige inductie volgt nu dat $\int_1^\infty x^a e^{-x}\mathrm{d}x < \infty$ geldt voor alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dit betekent dat $\int_1^\infty x^a e^{-x}\mathrm{d}x < \infty$ voor alle $a \geq -1$.

We zagen al dat het ook gold voor $a \leq 0$. We concluderen dat $\int_1^\infty x^a e^{-x}\mathrm{d} < \infty$ voor alle $a \in \mathbb{R}$. □

We hebben nu nog twee lemma's nodig voordat we de analytische voortzetting kunnen afleiden. De eerste gaat over een uitdrukking voor $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})n^{-s}$.

**Lemma 2.6.** *Voor* $s \in \mathbb{C}$ *met* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *geldt*

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})n^{-s} = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}} \frac{e^{-\pi n^2 x}}{x}\mathrm{d}x \ .$$

*Bewijs.* De definitie van de $\Gamma$-functie (zie bijlage A) invullen geeft

$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})n^{-s} &= \pi^{-\frac{s}{2}}n^{-s}\int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}e^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{s}{2}} x^{\frac{s}{2}}\frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{x}{\pi n^2}\right)^{\frac{s}{2}}\frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x \ .\end{aligned}$$

Als we nu de substitutie $u = \frac{x}{\pi n^2}$ doen, krijgen we $x = \pi n^2 u$ en $\mathrm{d}x = \pi n^2 \mathrm{d}u$. De grenzen lopen van dan van $u = 0$ tot $u = \infty$. Dit invullen in de vergelijking hierboven geeft

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(\frac{x}{\pi n^2}\right)^{\frac{s}{2}}\frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x &= \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}}\frac{e^{-\pi n^2 u}}{\pi n^2 u}\pi n^2\mathrm{d}u \\ &= \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}}\frac{e^{-\pi n^2 u}}{u}\mathrm{d}u \ ,\end{aligned}$$

en dit bewijst het lemma □

Het laatste lemma dat we nodig hebben is heel essentieel voor het bewijs straks. Dit lemma zegt iets over een oneigenlijke integraal.

**Lemma 2.7.** *Voor alle* $s \in \mathbb{C}$ *met* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *geldt*

$$\int_0^\infty x^{\frac{s}{2}}\frac{\omega(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_1^\infty \omega(x)\left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{1}{s(s-1)},$$

*waarbij de rechterkant absoluut convergent is in het gebied* $s \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$.

*Bewijs.* Deze integraal is op twee manieren oneigenlijk. Namelijk bij $x = 0$ en $x = \infty$. We gaan de integraal daarom opslitsen.

$$\int_0^\infty x^{\frac{s}{2}} \frac{\omega(x)}{x} \mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\frac{s}{2}} \frac{\omega(x)}{x} \mathrm{d}x + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}} \frac{\omega(x)}{x} \mathrm{d}x$$

We gaan nu bij de integraal die van 0 tot 1 loopt, de transformatie $u = \frac{1}{x}$ toepassen. Dit geeft $dx = -\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$ en de grenzen $u = \infty$ en $u = 1$.

$$\int_0^1 x^{\frac{s}{2}} \frac{\omega(x)}{x} \mathrm{d}x + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}} \frac{\omega(x)}{x} \mathrm{d}x = -\int_\infty^1 \left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{s}{2}} \frac{\omega(\frac{1}{u})}{\frac{1}{u}} \frac{1}{u^2} \mathrm{d}u + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}} \frac{\omega(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

$$= \int_1^\infty (u)^{-\frac{s}{2}} \omega\left(u^{-1}\right) \frac{\mathrm{d}u}{u} + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}} \frac{\omega(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

Als we vervolgens Lemma 2.4 toepassen, krijgen we

$$\int_1^\infty u^{-\frac{s}{2}} \left(u^{\frac{1}{2}}\omega(u) + \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right) \frac{\mathrm{d}u}{u} + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}} \frac{\omega(x)}{x} \mathrm{d}x$$

$$= \int_1^\infty \omega(x) \left(x^{\frac{s}{2}} + x^{-\frac{s}{2}} x^{\frac{1}{2}}\right) \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{1}{2} \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}} \left(x^{\frac{1}{2}} - 1\right) \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

De linkerintegraal is precies degene die we ook in het lemma hebben staan. Als we nu laten zien dat de rechterintegraal gelijk is aan $\dfrac{1}{s(s-1)}$ zijn we klaar met het eerste deel van het lemma. Deze rechterintegraal uitwerken geeft

$$\frac{1}{2} \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}-1} - x^{-\frac{s}{2}-1} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{s}{2}-1} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}} x^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}} - \frac{1}{-\frac{s}{2}} x^{-\frac{s}{2}}\right]_1^\infty = \left[\frac{1}{1-s} x^{\frac{1-s}{2}} + \frac{1}{s} x^{-\frac{s}{2}}\right]_1^\infty$$

$$\underbrace{=}_{\mathrm{Re}(s)>1} \left(\frac{1}{1-s}0 + \frac{1}{s}0 - \frac{1}{1-s}1^{\frac{1-s}{2}} - \frac{1}{s}1^{-\frac{s}{2}}\right) = \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s(s-1)}.$$

We vinden dus

$$\int_0^\infty x^{\frac{s}{2}} \frac{\omega(x)}{x} \mathrm{d}x = \int_1^\infty \omega(x) \left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right) \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{1}{s(s-1)}.$$

Merk op dat we hier inderdaad voor nodig hadden dat $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Dan gaan we nu laten zien dat deze rechterkant absoluut convergeert voor $s \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. We gaan hiervoor kijken waar de integraal van de rechterkant absoluut convergent is. Toepassen van " $\left|\int f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int |f(x)|\,\mathrm{d}x$" en de driehoeksongelijkheid geeft

$$\left|\int_1^\infty \omega(x) \left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right) \frac{\mathrm{d}x}{x}\right| = \left|\int_1^\infty \omega(x) x^{\frac{s}{2}-1} + \omega(x) x^{\frac{1-s}{2}-1} \mathrm{d}x\right|$$

$$\leq \int_1^\infty \left|\omega(x) x^{\frac{s}{2}-1} + \omega(x) x^{\frac{1-s}{2}-1}\right| \mathrm{d}x \leq \int_1^\infty \left|\omega(x) x^{\frac{s}{2}-1}\right| + \left|\omega(x) x^{\frac{1-s}{2}-1}\right| \mathrm{d}x\ .$$

We gaan nu Lemma 2.4ii) toepassen. Deze zegt dat we $\omega(x)$ kunnen afschatten met $Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$ als $x \geq 1$. We krijgen

$$\int_1^\infty \left|\omega(x)x^{\frac{s}{2}-1}\right| + \left|\omega(x)x^{\frac{1-s}{2}-1}\right| \mathrm{d}x \leq \int_1^\infty \left|Ce^{-x}x^{\frac{s}{2}-1}\right| \mathrm{d}x + \int_1^\infty \left|Ce^{-x}x^{\frac{1-s}{2}-1}\right| \mathrm{d}x$$
$$= C\int_1^\infty e^{-x}x^{\mathrm{Re}(\frac{s}{2}-1)}\mathrm{d}x + C\int_1^\infty e^{-x}x^{\mathrm{Re}(\frac{1-s}{2}-1)}\mathrm{d}x \ .$$

Via Lemma 2.5 weten we dat $\int_1^\infty e^{-x}x^a\mathrm{d}x$ convergeert voor elke $a \in \mathbb{R}$. Aangezien $\mathrm{Re}(\frac{s}{2}-1), \mathrm{Re}(\frac{1-s}{2}-1) \in \mathbb{R}$, convergeren beide integralen hierboven en is de integraal $\displaystyle\int_1^\infty \omega(x)\left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}$ convergent voor elke $s \in \mathbb{C}$.

Aangezien $\dfrac{1}{s(s-1)}$ goed gedefinieerd is voor $s \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ volgt dat

$$\int_1^\infty \omega(x)\left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{1}{s(s-1)}$$

absoluut convergent is voor $s \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. □

*Opmerking* 2.8. Merk op dat $\displaystyle\int_0^\infty x^{\frac{s}{2}}\frac{\omega(x)}{x}\mathrm{d}x$ absoluut convergeert als $\mathrm{Re}(s) > 1$, maar dat deze niet per se absoluut convergeert op het hele gebied waar $\displaystyle\int_1^\infty \omega(x)\left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{1}{s(s-1)}$ absoluut convergeert. We weten nu namelijk dat de gelijkheid geldt voor $s \in \mathbb{C}$ met $\mathrm{Re}(s) > 1$, maar we weten niet of deze geldt voor $s \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. De tweede term is de analytische voortzetting van $\displaystyle\int_0^\infty x^{\frac{s}{2}}\frac{\omega(x)}{x}\mathrm{d}x$ naar $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. Hierover later meer in het bewijs van de analytische voortzetting van $\zeta$.

### 2.1.2. *De Analytische Voortzetting.*

Nu we alle benodigde lemma's hebben, kunnen we de analytische voortzetting gaan afleiden.

**Stelling 2.9.** $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\dfrac{s}{2})\zeta(s)$ *heeft een analytische voortzetting naar* $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ *gegeven door*

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \int_1^\infty \omega(x)\left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{1}{s(s-1)} \ .$$

*Bewijs.* We beginnen met $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\dfrac{s}{2})\zeta(s)$ omschrijven naar een integraal met behulp van Lemma 2.6.

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})n^{-s} = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}}\frac{e^{-\pi n^2 x}}{x}\mathrm{d}x$$
$$\underbrace{=}_{(*)} \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty x^{\frac{s}{2}}\frac{e^{-\pi n^2 x}}{x}\mathrm{d}x$$

waarbij we bij (*) de som en integraal omwisselen. Dat dit mag volgt uit de gedomineerde convergentiestelling van Lebesque. Wat er eigenlijk links van het '=' teken staat is namelijk

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty \sum_{n=1}^{k} x^{\frac{s}{2}}\frac{e^{-\pi n^2 x}}{x}\mathrm{d}x\ .$$

De gedomineerde convergentie stelling zegt dat we de limiet van $k$ en de limiet naar oneindig van de integraal mogen omwisselen als de partiële som $\sum_{n=1}^{k} x^{\frac{s}{2}}\frac{e^{-\pi n^2 x}}{x}$ gedomineerd wordt door een functie waarvan de oneigenlijke integraal absoluut convergent is. Deze partiële som wordt gedomineerd door de functie $\omega(x)$, wat precies de limiet van de partiële som is. Dus we mogen de limieten omwisselen als de integraal van de verwisselde limieten convergeert. Of anders gezegd: als we de limieten omwisselen en de integraal convergeert, dan mochten we de limieten blijkbaar omwisselen. Dus we moeten kijken of

$$\int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} x^{\frac{s}{2}}\frac{e^{-\pi n^2 x}}{x}\mathrm{d}x = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}}\frac{\omega(x)}{x}\mathrm{d}x$$

absoluut convergeert. Opmerking 2.8 zegt dat deze integraal absoluut convergent is en gelijk is aan

$$\int_1^\infty \omega(x)\left(x^{\frac{s}{2}}+x^{\frac{1-s}{2}}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{1}{s(s-1)} \text{ als } \mathrm{Re}(s)>1.$$

Dus we vinden dat

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \int_1^\infty \omega(x)\left(x^{\frac{s}{2}}+x^{\frac{1-s}{2}}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{1}{s(s-1)},$$

voor $s\in\mathbb{C}$ met $\mathrm{Re}(s)>1$.

Aangezien deze rechterkant absoluut convergent is voor $s\in\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ (Lemma 2.7) is deze ook analytisch in dat gebied. De identiteitsstelling voor analytische functies zegt nu dat

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \int_1^\infty \omega(x)\left(x^{\frac{s}{2}}+x^{\frac{1-s}{2}}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{1}{s(s-1)} \tag{2.3}$$

voor alle $s\in\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. □

Deze analytische voortzetting heeft een aantal belangrijke gevolgen.

**Gevolg 2.10.** *$\zeta$ is analytisch voort te zetten naar $\mathbb{C}\backslash\{1\}$. Deze voortzetting kan bepaald worden door middel van* (2.3)*.*

*Bewijs.* Via Stelling 2.9 weten we dat beide kanten van (2.3) analytisch zijn op $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. $\zeta$ is dus alleen niet analytisch op dat gebied, als $\zeta$ daar polen heeft. Dit kan alleen als $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})$ nulpunten heeft op $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. Maar dit is niet het geval want het is duidelijk dat $\pi^{-\frac{s}{2}}$ geen nulpunten heeft en uit bijlage A volgt dat de $\Gamma$-functie ook geen nulpunten heeft.

Verder heeft $\Gamma(\frac{s}{2})$ een simpele pool in $s=0$. Deze komt overeen met de pool aan de rechterkant van (2.3). Dit betekent dat $\zeta$ daar zelf wel analytisch is. Dus $\zeta$ is analytisch voort te zetten naar $\mathbb{C}\backslash\{1\}$. □

Een ander belangrijk gevolg gaat over nulpunten en polen van $\zeta$.

**Gevolg 2.11.** *$\zeta$ heeft een simpele pool in $s = 1$ en nulpunten in $s = -2k,\ k \in \mathbb{N}_0$. Deze nulpunten worden de triviale nulpunten van de $\zeta$-functie genoemd.*

*Bewijs.* We kunnen via de analytische voortzetting (2.3) aflezen waar polen en een aantal nulpunten van de $\zeta$-functie liggen. Als namelijk één van beide kanten een pool heeft van een bepaalde orde in $s_0$, moet de andere kant ook een pool hebben van dezelfde orde in $s_0$.

De enige polen van de rechterkant van (2.3) komen van de term $\dfrac{1}{s(s-1)}$. Deze heeft simpele polen in $s = 0$ en $s = 1$. Dit moet dus ook aan de linkerkant gelden. Aangezien $\pi^{-\frac{s}{2}}$ geen nulpunten of polen heeft, moeten deze polen komen van $\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$. We weten dat de $\Gamma$-functie geen nulpunten heeft, maar wel simpele polen in alle niet-positieve gehele getallen (dus ook bij 0). Dit betekent dus dat $\Gamma(\frac{s}{2})$ simpele polen heeft in $s = -2k,\ k \in \mathbb{N}_0$. De simpele pool in $s = 1$ komt dus niet van de $\Gamma$-functie en daarom moet de $\zeta$-functie een simpele pool in $s = 1$ hebben.

De simpele pool in $s = 0$ komt van de $\Gamma$-functie en dat betekent dat $\zeta(0)$ geen nulpunt of pool is.

Aangezien de rechterkant van (2.3) verder geen polen heeft, moeten de simpele polen van $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ in $s = -2k,\ k \in \mathbb{N}_0$ worden opgeheven door nulpunten van de $\zeta$-functie. Er geldt dus dat $\zeta(s) = 0$ als $s = -2k,\ k \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Een laatste gevolg voordat we naar de functionaalvergelijking gaan, is dat $\zeta$ reëelwaardig is op de reële as.

**Gevolg 2.12.** $\zeta(x) \in \mathbb{R}$ *als* $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

*Bewijs.* Neem $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ willekeurig. We gaan gevallen opsplitsen.

- Als $x = -2k, k \in \mathbb{N}$ dan is $x$ een triviaal nulpunt van $\zeta$ en zijn we klaar.
- Als $x = 0$ geldt er als we bij (2.3) aan beide kanten met $s$ vermenigvuldigen dat
$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0} s\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) &= \lim_{s\to 0}\int_1^\infty \omega(x)\left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{1}{(s-1)} \\ &= \int_1^\infty \omega(x)\left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} - 1 \in \mathbb{R},\end{aligned}$$
aangezien rechts niets imaginairs staat. Aangezien $\pi^0 = 1$ en $\zeta(0)$ goed gedefinieerd zijn geldt er dus dat
$$\lim_{s\to 0} s\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) \in \mathbb{R} \iff \zeta(0)\lim_{s\to 0} s\Gamma(\frac{s}{2}) \in \mathbb{R}.$$
Als we nu laten zien dat $\lim_{s\to 0} s\Gamma(\frac{s}{2}) \in \mathbb{R}$ moet er ook wel gelden $\zeta(0) \in \mathbb{R}$. Via bijlage A weten we dat $\Gamma$ een simpele pool heeft met residu 1 in $s = 0$, dus
$$\lim_{s\to 0} s\Gamma(\frac{s}{2}) = 2\lim_{z\to 0} z\Gamma(z) = 2 \in \mathbb{R}$$
en er volgt $\zeta(0) \in \mathbb{R}$.

- De laatste mogelijkheid is dat $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2k, k \in \mathbb{N}_0\}$. Als we deze $x$ aan de rechterkant van (2.3) voor $s$ invullen, komt er een reëel getal uit aangezien er dan niets in de vergelijking imaginair is. Dit betekent dat er dan links ook iets reëels uit mofet komen. Dus
$$\pi^{-\frac{x}{2}}\Gamma(\frac{x}{2})\zeta(x) \in \mathbb{R}.$$
Aangezien $\pi^{-\frac{x}{2}} \in \mathbb{R}$ en $\Gamma(\frac{x}{2}) \in \mathbb{R}$ voor $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2k, k \in \mathbb{N}_0\}$, volgt dat ook $\zeta(x) \in \mathbb{R}$. □

2.2. **Functionaalvergelijking.**
We kunnen helaas niet makkelijk afleiden wanneer de rechterkant van (2.3) 0 is. Hierdoor zijn niet eenvoudig nog meer nulpunten van de $\zeta$-functie af te leiden. Wel kunnen we als we goed naar de rechterkant van (2.3) kijken, een belangrijke observatie doen. Als we hier '$1-s$' invullen komt er hetzelfde uit als wanneer we '$s$' invullen! Hiermee kunnen we relatief eenvoudig de volgende belangrijke functionaal vergelijking afleiden:

**Stelling 2.13.** *Voor $s \in \mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$ geldt*
$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s).$$

*Bewijs.* We gaan hiervoor dus (2.3) gebruiken. Als we hier $1-s$ invullen krijgen we
$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s) &= \int_1^\infty \omega(x)\left(x^{\frac{1-s}{2}} + x^{\frac{1-(1-s)}{2}}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{1}{(1-s)(1-s-1)}\\ &= \int_1^\infty \omega(x)\left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{1}{s(s-1)}\\ &= \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s).\end{aligned}$$
En dit is de functionaal vergelijking waar we naar op zoek waren. □

Deze functionaalvergelijking, die een symmetrie van de $\zeta$-functie toont, is een erg mooi resultaat en speelt een belangrijke rol bij het analyseren van de $\zeta$-functie. Een paar fundamentele resultaten van de $\zeta$-functie gebruiken deze functionaalvergelijking. Als er iets wordt gezegd over het gedrag van $\zeta$ in de kritieke strip (zie hoofdstuk 4), is dat bijna altijd voortgebouwd op deze vergelijking. In dit verslag zal hij daarom ook nog een aantal keer terug komen.

## 3. Alternatieve Representaties

In het vorige hoofdstuk zagen we dat de somrepresentatie van de $\zeta$-functie, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, niet de enige manier is om de $\zeta$-functie te representeren en in zekere zin ook beperkt bruikbaar is. Deze representatie is namelijk alleen geldig als het reëele deel van $s$ groter dan één is. We zagen dat als we de $\zeta$-functie door een integraal laten representeren, we opeens veel meer dingen over de functie konden zeggen.

In dit hoofdstuk gaan we kijken naar drie verschillende representaties van de $\zeta$-functie die elk op hun eigen manier nuttig zijn.
De eerste representatie waar we naar zullen kijken is een productformule. Deze convergent op hetzelfde gebied als de bekende somprepresentatie van de $\zeta$-functie, namelijk op het gebied in het complexe vlak met reëel deel groter dan één. Deze productformulerepresentatie is als eerste bewezen door Euler en is enorm belangrijk aangezien we hiermee kunnen laten zien dat er geen nulpunten van de $\zeta$-functie zijn met reëel deel groter dan één.
Hierna zullen we kijken naar twee representaties van de $\zeta$-functie die geldig zijn op het gebied in het complexe vlak met reëel deel groter dan 0 en $s \neq 1$. Deze representaties hebben beiden op hun eigen manier een toepassing in de theorie over de $\zeta$-functie.

3.1. **Productformule.** Één van de bijzondere eigenschappen van de $\zeta$-functie is dat deze een link heeft met priemgetallen. De $\zeta$-functie heeft naast Definitie 1.1 namelijk ook een representatie in de vorm van een productformule die afhankelijk is van priemgetallen.

**Stelling 3.1.** *Laat $P$ de verzameling van alle priemgetallen zijn. Voor $s \in \mathbb{C}$ met $Re(s) > 1$ geldt er:*

$$\zeta(s) = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Voor deze stelling zijn verschillende bewijzen. Het leuke is dat sommige van deze bewijzen meer hangen naar de analytische kant, en anderen weer naar de getaltheorie kant. Voor de afwisseling zal ik een bewijs laten zien die meer richting getaltheorie gaat, maar eerst hebben we een aantal definities en lemma's nodig.

**Definitie 3.2.** *Laat $S$ een verzameling priemgetallen zijn, dan definiëren we*

$$q(S) = \prod_{p \in S} p$$

*het product van deze priemgetallen.*

We zijn straks geïnteresseerd in de getallen die grootste gemeenschappelijke deler (ggd) 1 hebben met $q(S)$. Deze verzameling definiëren we als $M(S)$.

**Definitie 3.3.** *Laat $S$ een verzameling priemgetallen zijn, dan definiëren we*

$$M(S) := \{m \in \mathbb{N} : ggd(m, q(S)) = 1\}.$$

Een $m$ zit in $M(S)$, als $m$ ggd 1 heeft met elk priemgetal van $S$. Dus $ggd(m, q(S)) = 1$ als $ggd(m, p) = 1$ voor alle $p \in S$.
Een voorbeeld van een verzameling $M(S)$ is $M(\{2, 3\})$. Dit zijn alle getallen in $\mathbb{N}$ die niet deelbaar zijn door 2 of 3. Dus $7 \in M(\{2, 3\})$, maar $15 \notin M(\{2, 3\})$.

De laatste definitie die we dit hoofdstuk nodig hebben gaat over de verzameling $M(S)$, maar dan waaruit $p'^k$ is 'losgetrokken'. Hierbij is $p'$ een priemgetal die niet in $S$ zit en $k \in \mathbb{N}_0$.

**Definitie 3.4.** *Laat $S$ een verzameling priemgetallen zijn en $p'$ een priemgetal die niet in $S$ zit. Dan definiëren we*

$$M_{p'}(S) := \{m_1 p'^k : \ ggd(m_1, q(S \cup \{p'\}) = 1), \ m_1 \in \mathbb{N} \text{ en } k \in \mathbb{N}_0\}.$$

We gaan $M(S)$ en $M_{p'}(S)$ aan elkaar linken. Het blijkt namelijk dat deze twee verzamelen hetzelfde zijn.

**Lemma 3.5.** *Laat $S$ een willekeurige verzameling priemgetallen zijn en $p'$ een priemgetal die niet in $S$ zit. Dan geldt*

$$M(S) = M_{p'}(S)$$

*Bewijs.* Kies willekeurig voor $S$ een verzameling priemgetallen en voor $p'$ een priemgetal die niet in $S$ zit. Neem $m \in M(S)$. Elk getal uit $\mathbb{N}$ heeft een unieke priemgetal decompositie. We gaan kijken naar de priemgetaldecompositie van $m$. In deze decompositie van $m$ komt de factor $p'^k$ voor, waarbij $k \in \mathbb{N}_0$ zo groot mogelijk gekozen is. Deze $k$ is uniek, dus we kunnen $m$ uniek schrijven als $m = m'p'^k$, $k \in \mathbb{N}_0$ (als $k = 0$ dan zit $p'$ niet in de decompositie van $m$). Voor deze $m'$ geldt

(1) $ggd(m', p') = 1$
(2) $ggd(m', q(S)) = 1$.

Dit tweede geldt omdat $ggd(m, q(S)) = 1$ en $m'$ uit minder of dezelfde factoren als $m$ bestaat. Uit (1) en (2) volgt dat $ggd(m', q(S \cup \{p'\}) = 1$. Er geldt dus

$$m \in \{m_1 p'^k : \ ggd(m_1, q(S \cup \{p'\}) = 1), \ m_1 \in \mathbb{N} \text{ en } k \in \mathbb{N}_0\} = M_{p'}(S).$$

Aangezien $m$ willekeurig was gekozen, geldt dit voor elke $m \in M(S)$. Dus $M(S) \subseteq M_{p'}(S)$.

Neem nu $m_1 p'^k \in M_{p'}(S)$ willekeurig. Dan volgt uit de definitie van $M_{p'}(S)$ dat $ggd(m_1, q(S \cup \{p'\}) = 1$. Aangezien $p' \notin S$ volgt hieruit dat $ggd(m_1 p^k, q(S)) = 1$. Uit de definitie van $M(S)$ volgt nu dat $m_1 p^k \in M(S)$. Dus $M_{p'}(S) \subseteq M(S)$.
We concluderen dat $M(S) = M_{p'}(S)$. □

Nu we dit resultaat hebben kunnen we een uitdrukking voor het eindige product

$$\prod_{p \in S} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

afleiden. Als we in deze uitdrukking die we gaan afleiden hieronder $S$ laten groeien naar de verzameling van alle priemgetallen $P$ kunnen we namelijk de productformule van Stelling 3.1 bewijzen.

**Lemma 3.6.** *Laat $S$ een willekeurige verzameling priemgetallen zijn. Dan geldt*

$$\zeta(s)\prod_{p\in S}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=\sum_{m\in M(S)}\frac{1}{m^s}\ \text{als}\ \operatorname{Re}(s)>1. \tag{3.1}$$

*Bewijs.* Links staat $\zeta$ vermenigvuldigs met het eindige product waar we het zojuist over hadden en rechts staat de som van $m^{-s}$ van alle $m$ die ggd 1 hebben met $q(S)$. We zullen de vergelijking gaan bewijzen via inductie. Vergelijking (3.1) is dus onze inductieveronderstelling (IV).

We zullen eerst laten zien dat het voor de verzameling $S=\emptyset$ geldt, de lege verzameling. Het lege product is gelijk aan 1. Dit geeft voor de linkerkant van de IV

$$\zeta(s)\prod_{p\in S}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=\zeta(s)\prod_{p\in\emptyset}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=\zeta(s)\cdot 1=\zeta(s).$$

Verder geldt, aangezien $S=\emptyset$, dat

$$q(S)=q(\emptyset)=1.$$

Dus aan de rechterkant van de IV sommeren we $m^{-s}$ voor elke $m$ waarvoor geldt: $ggd(m,1)=1$. Dit geldt voor elke $m\in\mathbb{N}$. Dus

$$\sum_{m\in M(S)}\frac{1}{m^s}=\sum_{m\in M(\emptyset)}\frac{1}{m^s}=\sum_{m\in\mathbb{N}}\frac{1}{m^s}=\zeta(s),$$

waarbij we de laatste stap Definitie 1.1 van $\zeta$ mogen gebruiken aangezien $\operatorname{Re}(s)>1$. We zien dat de IV klopt voor $S=\emptyset$.

Dan nemen we nu aan dat de IV klopt voor een willekeurige verzameling priemgetallen $S$. We willen dat de IV ook klopt als we een willekeurig priemgetal $p'\notin S$ toevoegen aan $S$, zeg $S'=S\cup\{p'\}$. We weten van Lemma 3.5 dat $M(S)=M_{p'}(S)$. Dit invullen in de IV geeft

$$\zeta(s)\prod_{p\in S}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=\sum_{m\in M(S)}\frac{1}{m^s}=\sum_{m_1p'^k\in M_{p'}(S)}\frac{1}{(m_1p'^k)^s}=\sum_{m_1p'^k\in M_{p'}(S)}\frac{1}{m_1^s(p'^s)^k}.$$

De definitie van $M_{p'}(S)$ zegt dat als $m_1p'^k\in M_{p'}(S)$, er geldt $m_1\in M(S\cup\{p'\})=M(S')$ en $k\in\mathbb{N}_0$. Dit geeft

$$\sum_{m_1p'^k\in M_{p'}(S)}\frac{1}{m_1^s(p'^s)^k}=\sum_{m_1\in M(S')}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m_1^s(p'^s)^k}=\sum_{m_1\in M(S')}\frac{1}{m_1^s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(p'^s)^k}.$$

En $\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\frac{1}{(p'^s)^k}$ is een meetkundige reeks. Aangezien $\operatorname{Re}(s)>1$ en $p'\geq 2$ (want het is een priemgetal), geldt er $|p'^s|>0$. Hieruit volgt dat $\left|\frac{1}{p'^s}\right|<1$ en dus dat de meetkundige reeks convergeert:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(p'^s)^k}=\left(1-\frac{1}{p'^s}\right)^{-1}.$$

Dit invullen geeft

$$\sum_{m_1\in M(S')}\frac{1}{m_1^s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(p'^s)^k}=\sum_{m_1\in M(S')}\frac{1}{m_1^s}\left(1-\frac{1}{p'^s}\right)^{-1}.$$

Als we dit invullen in de IV krijgen we

$$\begin{aligned}
&\zeta(s)\prod_{p\in S}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \sum_{m_1\in M(S')}\frac{1}{m_1^s}\left(1-\frac{1}{p'^s}\right)^{-1}\\
\iff \quad &\left(1-\frac{1}{p'^s}\right)\zeta(s)\prod_{p\in S}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \sum_{m_1\in M(S')}\frac{1}{m_1^s}\\
\iff \quad &\zeta(s)\prod_{p\in S'}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \sum_{m_1\in M(S')}\frac{1}{m_1^s}.
\end{aligned}$$

Dus de IV klopt ook voor $S' = S\cup\{p'\}$. Uit het principe van volledige inductie volgt nu dat de IV waar is voor alle verzamelingen $S$ van priemgetallen. $\square$

Nu we dit lemma hebben, kunnen we Stelling 3.1 bewijzen.

*Bewijs van Stelling 3.1.* We gebruiken Lemma 3.6. Deze zegt dat

$$\zeta(s)\prod_{p\in S}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \sum_{m\in M(S)}\frac{1}{m^s} \tag{3.2}$$

voor $\mathrm{Re}(s) > 1$ en een verzameling priemgetallen $S$. We gaan $S$ zo kiezen dat deze steeds groter wordt en de verzameling $P$ van alle priemgetallen benadert. Als de rechterkant van (3.2) dan naar 1 convergeert kunnen we namelijk de stelling concluderen.

Definieer hiertoe $S(X)$, de verzameling priemgetallen kleiner dan een positief natuurlijk getal $X$:

$$S(X) := \{p\in P:\ p\leq X\},\ X>1.$$

Als $X$ groter wordt, zitten er dus steeds meer priemgetallen in $S(X)$ en zal $S(X)$ steeds dichter bij $P$ komen. Definieer

$$\lim_{X\to\infty} S(X) = \bigcup_{X=1}^{\infty} S(X).$$

Dan is eenvoudig in te zien dat $\lim\limits_{X\to\infty} S(X) = P$.

We willen laten zien dat als $X\to\infty$, er geldt $M\left(S(X)\right) = \{1\}$. Want dan geldt

$$\lim_{X\to\infty}\zeta(s)\prod_{p\in S(X)}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \lim_{X\to\infty}\sum_{m\in M(S(X))}\frac{1}{m^s} = \sum_{m\in\{1\}}\frac{1}{m^s} = 1.$$

Er geldt voor elke $X\in\mathbb{N}$ dat

$$\left|\zeta(s)\prod_{p\in S(X)}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)-1\right| = \left|-1+\sum_{m\in M(S(X))}\frac{1}{m^s}\right|.$$

Als we hier $m=1$ uit de som halen krijgen we

$$\left|-1+\frac{1}{1^s}+\sum_{m\in M(S(X))\setminus\{1\}}\frac{1}{m^s}\right| = \left|\sum_{m\in M(S(X))\setminus\{1\}}\frac{1}{m^s}\right| \leq \sum_{m\in M(S(X))\setminus\{1\}}\left|\frac{1}{m^s}\right|$$

$$\leq \sum_{m>X} \left| \frac{1}{m^s} \right| = \sum_{m>X} \frac{1}{m^{\mathrm{Re}(s)}}$$

Waarbij de $' \leq '$ uit de laatste regel volgt uit het feit dat

$$m \in M(S(X)) \backslash \{1\} = \{m : \ ggd(m, q(S(X))) = 1, \ m > 1\} \subset \{m > X\}.$$

Want links staan de getallen $'m'$ groter dan 1 die ggd 1 hebben met $q(S(X))$. Aangezien elk getal is opgebouwd uit priemgetallen kleiner of gelijk aan zichzelf en $S(X)$ al die priemgetallen bevat moet er voor deze getallen $'m'$ gelden dat deze groter dan $X$ zijn.
Uit de integraal test voor reeksen volgt nu

$$\sum_{m>X} \frac{1}{m^{\mathrm{Re}(s)}} \leq \int_X^\infty \frac{1}{m^{\mathrm{Re}(s)}} \mathrm{d}m = \int_X^\infty m^{-\mathrm{Re}(s)} \mathrm{d}m = \frac{1}{1-\mathrm{Re}(s)} \left[ m^{1-\mathrm{Re}(s)} \right]_X^\infty$$
$$= \frac{1}{\mathrm{Re}(s)-1} X^{1-\mathrm{Re}(s)},$$

waarbij de laatste stap volgt uit het feit dat $X > 1$ en $1 - \mathrm{Re}(s) < 0$ (want $\mathrm{Re}(s) > 1$). We vinden

$$\left| \zeta(s) \prod_{p \in S(X)} \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right) - 1 \right| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}(s)-1} X^{1-\mathrm{Re}(s)}. \tag{3.3}$$

Als we nu $X \to \infty$ laten gaan, dan gaat $\frac{1}{\mathrm{Re}(s)-1} X^{1-\mathrm{Re}(s)} \to 0$.
Hiermee kunnen we de stelling bewijzen, want

$$\left| \zeta(s) \prod_{p \in P} \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right) - 1 \right| = \lim_{X \to \infty} \left| \zeta(s) \prod_{p \in S(X)} \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right) - 1 \right|$$
$$\underbrace{\leq}_{(3.3)} \lim_{X \to \infty} \frac{1}{\mathrm{Re}(s)-1} X^{1-\mathrm{Re}(s)} = 0$$

We concluderen dat

$$\zeta(s) \prod_{p \in P} \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right) = 1 \iff \zeta(s) = \prod_{p \in P} \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}. \qquad \square$$

Het bijzondere aan deze stelling is dat het twee vakgebieden van de wiskunde, complexe analyse en getaltheorie, verbindt. De $\zeta$-functie is een soort brug tussen deze twee vakgebieden.

Met de $\zeta$-functie kunnen we zelfs dingen bewijzen van onderwerpen uit de getaltheorie. Een mooi voorbeeld hiervan is dat bij het bewijs van de bovenstaande stelling nergens is gebruikt dat er oneindig veel priemgetallen zijn, maar dat dit er wel relatief eenvoudig mee te bewijzen is:

*Bewijs.* Stel dat er eindig veel priemgetallen zijn. Er geldt dan

$$\lim_{s \to 1} \zeta(s) = \lim_{s \to 1} \prod_{p \in P} \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1} = \prod_{p \in P} \left( 1 - \frac{1}{p} \right)^{-1} < \infty,$$

waarbij in de laatste stap wordt gebruikt dat een eindig product waarin alle termen eindig zijn, zelf ook eindig is. Maar we weten dat de $\zeta$-functie een pool heeft bij $s = 1$ en dat dus geldt $\lim_{s \to 1} \zeta(s) = \infty$. Een tegenspraak. Dus onze beginaanname was fout en we concluderen dat er oneindig veel priemgetallen zijn. $\square$

Merk op dat dit een heel ander bewijs is dan Euclides ooit gaf. Deze nam ook aan dat er eindig veel priemgetallen waren, maar keek toen naar het product van alle priemgetallen plus één en liet zien dat dat dan een nieuw priemgetal zou zijn.

Ik liet dit bewijs met de productformule zien omdat ik wilde laten zien dat er iets uit de getaltheorie bewezen mee kan worden. Het is verder helemaal geen efficiënt bewijs als je het vergelijkt met die van Euclides namelijk.

We zullen deze paragraaf afsluiten met een belangrijk gevolg van de productformule-representatie van de $\zeta$-functie:

**Gevolg 3.7.** *$\zeta$ heeft geen nulpunten in het halfvlak $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\}$.*

*Bewijs.* Neem $s_0 \in \mathbb{C}$ met $\mathrm{Re}(s_0) > 1$ en neem aan dat $\zeta(s_0) = 0$. Bekijk nu (3.3) van het bewijs van Stelling 3.1. Merk op dat we voor deze vergelijking nodig hadden dat $\mathrm{Re}(s) > 1$. Aangezien $\mathrm{Re}(s_0) > 1$ mogen we hier $s_0$ invullen. We krijgen

$$\left| \zeta(s_0) \prod_{p \in S(X)} \left(1 - \frac{1}{p^{s_0}}\right) - 1 \right| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}(s_0) - 1} X^{1 - \mathrm{Re}(s_0)}.$$

Noem $C = \mathrm{Re}(s_0) - 1 > 0$. $X^{-C}$ daalt dus naar 0 als $X$ groter wordt. We kiezen $X$ zo groot dat $X^{-C} < C$. Dit geeft

$$\frac{1}{\mathrm{Re}(s_0) - 1} X^{1 - \mathrm{Re}(s_0)} = \frac{1}{C} X^{-C} < \frac{1}{C} C = 1,$$

dus

$$\left| \zeta(s_0) \prod_{p \in S(X)} \left(1 - \frac{1}{p^{s_0}}\right) - 1 \right| < 1. \tag{3.4}$$

Aangezien $X$ eindig is, bevat $S(X)$ een eindig aantal priemgetallen. Daarnaast is $\left(1 - \frac{1}{p^{s_0}}\right) < \infty$ voor elke $p \in P$. Uit deze twee dingen volgt dat $\prod_{p \in S(X)} \left(1 - \frac{1}{p^{s_0}}\right)$ ook eindig is, zeg

$$\prod_{p \in S(X)} \left(1 - \frac{1}{p^{s_0}}\right) = D.$$

Dit invullen in (3.4) geeft

$$|D\zeta(s_0) - 1| < 1.$$

We hadden aangenomen dat $\zeta(s_0) = 0$, maar dat geeft

$$|0 - 1| < 1 \implies 1 < 1.$$

Een tegenspraak. Dus onze eerste aanname klopte niet en $\zeta(s_0) \neq 0$. Er volgt dat $\zeta$ geen nulpunten heeft in het halfvlak $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\}$. $\square$

3.2. **Alternerende $\zeta$-functie.** We zullen nu kijken naar een alternatieve representatie van $\zeta(s)$ die geldig is als $\mathrm{Re}(s) > 0$ en $s \neq 1$. Deze representatie maakt gebruik van de alternerende $\zeta$-functie.

**Definitie 3.8.** *De alternerende $\zeta$-functie, ook wel de Dirichlet $\eta$-functie, wordt gegeven door*

$$\eta(s) = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-s}.$$

*Opmerking* 3.9. Merk op dat in het speciale geval $\eta(1)$, we de alternerende harmonische reeks krijgen.

We hebben eerst een lemma nodig over het convergentiegebied van deze alternerende $\zeta$-functie. Vanwege opmerking 3.9 weten we dat deze functie in $s = 1$ convergeert, in tegenstelling tot de normale $\zeta$-functie. Het blijkt dat deze alternerende $\zeta$-functie convergeert als het reëele deel van $s$ groter dan 0 is. Met stellingen voor Dirichlet reeksen is dit relatief eenvoudig te bewijzen. Aangezien dit niet tot mijn kennis behoort geef ik een meer elementair bewijs, deze is hierdoor wel redelijk technisch.

**Lemma 3.10.** *De alternerende $\zeta$-functie is convergent voor alle $s \in \mathbb{C}$ met* $\mathrm{Re}(s) > 0$.

*Bewijs.* Neem $s \in \mathbb{C}$ met $\mathrm{Re}(s) > 0$ en laat $S_k$ de partiële som van deze reeks tot en met de $k$-de term zijn,

$$S_k = -\sum_{n=1}^{k}(-1)^n n^{-s}.$$

We gaan laten zien dat $S_k$ een cauchy-rij is, wat equivalent is aan dat de rij convergent is. Neem hiertoe $\varepsilon > 0$ willekeurig en laat
$N > \max\{\left(\frac{1}{2\left(2+\frac{|s|}{2\,\mathrm{Re}(s)}\right)}\varepsilon\right)^{-\frac{1}{\mathrm{Re}(s)}}, \left(\frac{1}{2|s|}\varepsilon\right)^{-\frac{1}{\mathrm{Re}(s)+1}}\}$.
Neem nu $m_1, m_2 > N$ willekeurig. Zonder verlies van algemeenheid kunnen we aannnemen dat $m_2 > m_1$. We willen nu laten zien dat

$$|S_{m_2} - S_{m_1}| = \left| -\sum_{n=m_1+1}^{m_2}(-1)^n n^{-s}\right| < \epsilon.$$

Dit gaan we doen door termen paarsgewijs samen te nemen. Hiervoor willen we dat de som begint bij een oneven $n$ en eindigt bij een even $n$. Kies hiervoor $m_3, m_4$ zo dat

$$m_3 = \begin{cases} m_1 + 1, \text{ als } m_1 + 1 \text{ oneven is} \\ m_1 + 2, \text{ als } m_1 + 1 \text{ even is} \end{cases}$$

en

$$m_4 = \begin{cases} m_2, \text{ als } m_2 \text{ even is} \\ m_2 - 1, \text{ als } m_2 \text{ oneven is} \end{cases}.$$

Nu is $m_3$ altijd oneven en $m_4$ altijd even. Nu geldt er voor elke $m_1, m_2$, ongeacht of ze even/oneven zijn dat

$$\left| -\sum_{n=m_1+1}^{m_2}(-1)^n n^{-s}\right| \leq \left|(m_1+1)^{-s}\right| + \left| -\sum_{n=m_3}^{m_4}(-1)^n n^{-s}\right| + \left|m_2^{-s}\right|$$

$$= (m_1 + 1)^{-\operatorname{Re}(s)} + \left| - \sum_{n=m_3}^{m_4} (-1)^n n^{-s} \right| + m_2^{-\operatorname{Re}(s)}, \quad (3.5)$$

waarbij we in het ergste geval de termen $\left|(m_1 + 1)^{-s}\right|$ en $\left|m_2^{-s}\right|$ dubbel tellen. Dit gebeurt als $m_1 + 1$ oneven is en $m_2$ even. We gaan nu van de reeks hierboven de termen paarsgewijs bekijken.

$$\left| - \sum_{n=m_3}^{m_4} (-1)^n n^{-s} \right| = \left| \sum_{n=\frac{1}{2}(m_3+1)}^{\frac{1}{2}m_4} (2n-1)^{-s} - (2n)^{-s} \right| \leq \sum_{n=\frac{1}{2}(m_3+1)}^{\frac{1}{2}m_4} \left|(2n-1)^{-s} - (2n)^{-s}\right|.$$

Deze termen rechts zijn precies gelijk aan integralen, namelijk

$$\begin{aligned} \sum_{n=\frac{1}{2}(m_3+1)}^{\frac{1}{2}m_4} \left|(2n-1)^{-s} - (2n)^{-s}\right| &= \sum_{n=\frac{1}{2}(m_3+1)}^{\frac{1}{2}m_4} \left| s \int_{2n-1}^{2n} x^{-(s+1)} \mathrm{d}x \right| \\ &\leq \sum_{n=\frac{1}{2}(m_3+1)}^{\frac{1}{2}m_4} |s| \int_{2n-1}^{2n} \left| x^{-(s+1)} \right| \mathrm{d}x \\ &= |s| \sum_{n=\frac{1}{2}(m_3+1)}^{\frac{1}{2}m_4} \int_{2n-1}^{2n} x^{-(\operatorname{Re}(s)+1)} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Aangezien $\operatorname{Re}(s) > 0$, is $x^{-(\operatorname{Re}(s)+1)}$ een monotoon dalende functie en neemt deze in het interval $[2n-1, 2n]$ zijn maximum aan bij $2n-1$. Als we hiermee de integraal afschatten krijgen we

$$|s| \sum_{n=\frac{1}{2}(m_3+1)}^{\frac{1}{2}m_4} \int_{2n-1}^{2n} x^{-(\operatorname{Re}(s)+1)} \mathrm{d}x \leq |s| \sum_{n=\frac{1}{2}(m_3+1)}^{\frac{1}{2}m_4} (2n-1)^{-(\operatorname{Re}(s)+1)}. \quad (3.6)$$

Als een functie $f$ monotoon dalend is, geldt

$$\sum_{n=k}^{K} f(n) \leq f(k) + \int_k^K f(x) \mathrm{d}x.$$

De functie $(2x-1)^{-(\operatorname{Re}(s)+1)}$ is monotoon dalend, dus we kunnen de reeks van (3.6) afschatten met

$$\begin{aligned} &|s| m_3^{-(\operatorname{Re}(s)+1)} + |s| \int_{n=\frac{1}{2}(m_3+1)}^{\frac{1}{2}m_4} (2x-1)^{-(\operatorname{Re}(s)+1)} \mathrm{d}x \\ =&|s| m_3^{-(\operatorname{Re}(s)+1)} - \frac{|s|}{2\operatorname{Re}(s)} \left[ (2x-1)^{-\operatorname{Re}(s)} \right]_{n=\frac{1}{2}(m_3+1)}^{\frac{1}{2}m_4} \\ =&|s| m_3^{-(\operatorname{Re}(s)+1)} - \frac{|s|}{2\operatorname{Re}(s)} (m_4 - 1)^{-\operatorname{Re}(s)} + \frac{|s|}{2\operatorname{Re}(s)} m_3^{-\operatorname{Re}(s)} \\ \leq&|s| m_3^{-(\operatorname{Re}(s)+1)} + \frac{|s|}{2\operatorname{Re}(s)} m_3^{-\operatorname{Re}(s)}. \end{aligned}$$

Dit invullen bij (3.5) geeft

$$|S_{m_2} - S_{m_1}| \leq (m_1 + 1)^{-\operatorname{Re}(s)} + |s| m_3^{-(\operatorname{Re}(s)+1)} + \frac{|s|}{2\operatorname{Re}(s)} m_3^{-\operatorname{Re}(s)} + m_2^{-\operatorname{Re}(s)}.$$

Aangezien $x^{-\operatorname{Re}(s)}$ en $x^{-(\operatorname{Re}(s)+1)}$ dalende functies zijn en $m_1+1, m_2, m_3 > N$, kunnen we de term hierboven afschatten met

$$\left(2+\frac{|s|}{2\operatorname{Re}(s)}\right)N^{-\operatorname{Re}(s)}+|s|N^{-(\operatorname{Re}(s)+1)}.$$

We hadden $N$ zo gekozen dat

$N > \max\{\left(\frac{1}{2\left(2+\frac{|s|}{2\operatorname{Re}(s)}\right)}\varepsilon\right)^{-\frac{1}{\operatorname{Re}(s)}}, \left(\frac{1}{2|s|}\varepsilon\right)^{-\frac{1}{\operatorname{Re}(s)+1}}\}$,

hieruit volgt

$$\left(2+\frac{|s|}{2\operatorname{Re}(s)}\right)N^{-\operatorname{Re}(s)}+|s|N^{-(\operatorname{Re}(s)+1)} < \frac{1}{2}\varepsilon+|s|\frac{1}{2|s|}\varepsilon=\varepsilon$$

□

Dan kunnen we nu de relatie bekijken tussen de $\zeta$-functie en de alternerende $\zeta$-functie.

**Stelling 3.11.** *Laat* $s \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ *met* $\operatorname{Re}(s) > 0$. *Dan geldt*

$$(1-2^{1-s})\zeta(s) = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-s}.$$

*Bewijs.* De truc van deze manier van schrijven is dat de rechterkant de termen van $\zeta$ alternerend telt. Neem $s \in \mathbb{C}$ met $\operatorname{Re}(s) > 1$ . We kunnen dan Definitie 1.1 gebruiken voor $\zeta(s)$ (een snel gemaakte fout is om voor $\zeta(s)$ de somrepresentatie in te vullen ongeacht wat $s$ is). We vinden

$$2^{1-s}\zeta(s) = 2^{1-s}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(2n)^{-s}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(2n)^{-s}$ is precies de $\zeta$-functie met alleen de even termen. Aangezien de functie

$$\frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right) = \begin{cases} 1 \text{ als } n \text{ even is} \\ 0 \text{ als } n \text{ oneven is} \end{cases}$$

alleen deze even termen telt, volgt er

$$\begin{aligned} 2\sum_{n=1}^{\infty}(2n)^{-s} &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right)n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^n\right)n^{-s} \\ &= \zeta(s)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-s}. \end{aligned}$$

Als we dit nu gebruiken voor $(1-2^{1-s})\zeta(s)$ vinden we

$$\begin{aligned} \left(1-2^{1-s}\right)\zeta(s) &= \zeta(s)-2^{1-s}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s} = \zeta(s)-\left(\zeta(s)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-s}\right) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-s}. \end{aligned}$$

We hebben dus het gevraagde laten zien voor $\operatorname{Re}(s) > 1$. Maar we weten via Lemma 3.10 dat de rechterkant convergent is voor alle $s \in \mathbb{C}$ met $\operatorname{Re}(s) > 0$. Rechts staat dus een analytische voortzetting van $\zeta$ naar het halfvlak in $\mathbb{C}$ met positief reëel deel, waarbij de pool van $\zeta(s)$ in $s = 1$ wordt opgeheven door het nulpunt daar van $\left(1 - 2^{1-s}\right)$. $\square$

Een gevolg van deze stelling is dat we nu het residu van de simpele pool van $\zeta$ (Gevolg 2.11) in $s = 1$ kunnen bepalen.

**Gevolg 3.12.** *De simpele pool van* $\zeta$ *in* $s = 1$ *heeft residu* $1$.

*Bewijs.* Met Stelling 3.11 vinden we

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = \lim_{s\to 1}\frac{s-1}{1-2^{1-s}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-s}.$$

We vinden via l'Hôpital dat

$$\lim_{s\to 1}\frac{s-1}{1-2^{1-s}} = \lim_{s\to 1}\frac{1}{\ln(2)2^{1-s}} = \frac{1}{\ln(2)}.$$

Verder convergeert de machtreeks van $\log(1+s)$, gegeven door

$$\log(1+s) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{s^n}{n},$$

in $s = 1$. Deze is gelijk aan

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-1}.$$

Dus we vinden

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = \lim_{s\to 1}\frac{s-1}{1-2^{1-s}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-s} = \frac{1}{\ln(2)}\log(1+1) = 1$$

$\square$

We wisten al dat $\zeta$ op $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ reëelwaardig is (Gevolg 2.12). Met Stelling 3.11 kunnen we ook afleiden dat $\zeta$ op de reële as tussen 0 en 1 negatief is en dus geen nulpunten aanneemt.

**Gevolg 3.13.** *Als* $x \in \mathbb{R}$ *en* $0 \le x < 1$ *dan geldt* $\zeta(x) < 0$.

*Bewijs.* We weten uit de één na laatste alinea van het bewijs van Gevolg 2.11 dat $\zeta(0) \neq 0$. Dus neem $x \in \mathbb{R}$ met $0 < x < 1$. Laat $\varepsilon = 1 - 2^{-x}$. Er geldt $\varepsilon > 0$ omdat $x > 0$. Aangezien we via Stelling 3.11 weten dat de reeks

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-x}$$

convergeert, is er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat als $m > N$ er geldt

$$\left|-\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^n n^{-x}\right| < \varepsilon.$$

En dit geeft

$$-\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^n n^{-x} > -\varepsilon.$$

Aangezien we $m$ oneven mogen kiezen kunnen we de reeks als volgt per twee samen nemen:

$$\begin{aligned}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-x} =&(1-2^{-x})+(3^{-x}-4^{-x})+\ \ldots+\big((m-2)^{-x}-(m-1)^{-x}\big)\\ &-\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^n n^{-x}.\end{aligned}$$

Invullen van $1-2^{-x}=\epsilon$ geeft vervolgens

$$\begin{aligned}&=\epsilon+(3^{-x}-4^{-x})+\ \ldots+\big((m-2)^{-x}-(m-1)^{-x}\big)-\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^n n^{-x}\\ &>\epsilon+(3^{-x}-4^{-x})+\ \ldots+\big((m-2)^{-x}-(m-1)^{-x}\big)-\varepsilon\\ &=(3^{-x}-4^{-x})+\ \ldots+\big((m-2)^{-x}-(m-1)^{-x}\big).\end{aligned}$$

Voor een willekeurige $n\in\mathbb{N}$ geldt

$$n^{-x}-(n+1)^{-x}>0,$$

aangezien $y^{-x}$ een dalende functie is van $y$ als $x>0$. Hieruit volgt dat

$$(3^{-x}-4^{-x})+\ \ldots+\big((m-2)^{-x}-(m-1)^{-x}\big)>0$$

en dus dat

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-x}>0.$$

Als we nu Stelling 3.11 gebruiken vinden we

$$(1-2^{1-x})\zeta(x)>0$$

En aangezien

$$1-2^{1-x}<0$$

als $x>0$ volgt dat $\zeta(x)<0$. □

3.3. **Derde alternatieve representatie.** De derde representatie voor $\zeta$ die we gaan afleiden is handig aangezien we hiermee het asymptotische gedrag van $\zeta(s)$ als $\mathrm{Im}(s)\to\infty$ kunnen afschatten. Iets wat we later bij het analyseren van de nulpunten nodig zullen hebben. Voor deze representatie hebben we de volgende notatie nodig voor positieve reële getallen $x$.

(1) $\lfloor x\rfloor$ is $x$ afgerond naar beneden. Dus bijvoorbeeld $\lfloor 3\frac{1}{4}\rfloor=3$.

(2) $r(x)=x-\lfloor x\rfloor$, het deel van $x$ dat niet een geheel getal is. Dus bijvoorbeeld $r(3\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$.

$\lfloor x\rfloor$ en $r(x)$ zijn samen dus het deel waaruit $x$ is opgebouwd, het gehele getal plus het deel 'achter de komma'. De derde representatie staat in de volgende stelling.

**Stelling 3.14.** *Laat $s\in\mathbb{C}\backslash\{1\}$ met $\mathrm{Re}(s)>0$. Dan geldt*

$$\zeta(s)=\frac{s}{s-1}-s\int_1^{\infty}\frac{r(x)}{x^{s+1}}$$

*Bewijs.* Neem als eerste $s \in \mathbb{C}$ met $\mathrm{Re}(s) > 1$. We kiezen nu nog $s$ zo dat $\mathrm{Re}(s) > 1$ omdat we straks de somrepresentatie van $\zeta$ willen gebruiken. We zullen later in het bewijs het geval $\mathrm{Re}(s) > 0$ bekijken.
We gaan langzaam toewerken naar de gevraagde representatie. Als $n \in \mathbb{N}$, dan geldt

$$s\int_n^{n+1} \frac{1}{x^{s+1}}\mathrm{d}x = s\left[-\frac{1}{s}\frac{1}{x^s}\right]_n^{n+1} = \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}.$$

Beide kanten met $n$ vermenigvuldigen geeft

$$\begin{aligned} ns\int_n^{n+1} \frac{1}{x^{s+1}}\mathrm{d}x &= \frac{n}{n^s} - \frac{n}{(n+1)^s} \\ \iff s\int_n^{n+1} \frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}\mathrm{d}x &= \frac{n}{n^s} - \frac{n}{(n+1)^s}, \end{aligned}$$

aangezien $\lfloor x\rfloor$ gelijk is aan $n$ in het interval van de integraal. Als we nu sommeren over alle $n \in \mathbb{N}$ krijgen we

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} s\int_n^{n+1} \frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} - \frac{n}{(n+1)^s} \\ \iff &s\int_1^{\infty} \frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n^s} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-(n-1)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \\ \iff &s\int_1^{\infty} \frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}\mathrm{d}x = \zeta(s), \end{aligned}$$

aangezien $\mathrm{Re}(s) > 1$. Deze integraal uitwerken geeft

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= s\int_1^{\infty} \frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}\mathrm{d}x = s\int_1^{\infty} \frac{x - r(x)}{x^{s+1}}\mathrm{d}x \\ &= s\left[\frac{1}{1-s}x^{1-s}\right]_1^{\infty} - s\int_1^{\infty} \frac{r(x)}{x^{s+1}}\mathrm{d}x = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{\infty} \frac{r(x)}{x^{s+1}}\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

waarbij we in de laatste stap weer gebruiken dat $\mathrm{Re}(s) > 1$.
Het volgt eenvoudig uit de integraaltest dat de integraal rechts absoluut convergent is voor elke $s \in \mathbb{C}$ met $\mathrm{Re}(s) > 0$. We hebben dus weer een representatie van de analytische uitbreiding gevonden van $\zeta$ naar het complexe vlak met reëel deel groter dan 0. De pool van $\zeta(s)$ in $s = 1$ komt overeen met de pool van $\dfrac{s}{s-1}$ in $s = 1$. $\square$

We kunnen met deze representatie een afschatting maken van $\zeta(s)$ als $\mathrm{Im}(s) \to \infty$.

**Gevolg 3.15.** *Laat $s \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ met $\mathrm{Re}(s) > 0$. Dan geldt*

$$\zeta(s) = \mathcal{O}\left(\mathrm{Im}(s)\right) \ \textit{als}\ \mathrm{Im}(s) \to \infty.$$

*Bewijs.* Neem $s \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ met $\mathrm{Re}(s) > 0$. Via Stelling 3.14 volgt dat

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &\le \left|\frac{s}{s-1}\right| + \left|s\int_1^{\infty} \frac{r(x)}{x^{s+1}}\mathrm{d}x\right| \le \left|\frac{s}{s-1}\right| + |s|\int_1^{\infty} \left|\frac{r(x)}{x^{s+1}}\right|\mathrm{d}x \\ &= \left|\frac{s}{s-1}\right| + |s|\int_1^{\infty} \frac{r(x)}{x^{\mathrm{Re}(s+1)}}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Als we hier $\operatorname{Im}(s) \to \infty$ laten gaan, gaat $\left|\frac{s}{s-1}\right| \to 1$, $|s| \to |\operatorname{Im}(s)|$ en blijft de integraal begrensd, zeg door een getal $C$ onafhankelijk van $\operatorname{Im}(s)$. We vinden

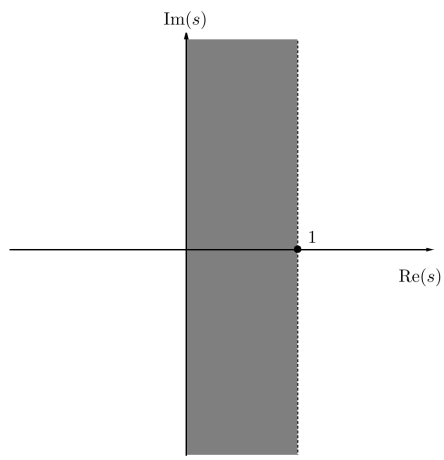
$$\lim_{\operatorname{Im}(s)\to\infty} |\zeta(s)| = 1 + C \lim_{\operatorname{Im}(s)\to\infty} |\operatorname{Im}(s)|$$

en dus dat

$$\zeta(s) = \mathcal{O}\left(\operatorname{Im}(s)\right) \text{ als } \operatorname{Im}(s) \to \infty \qquad \square$$

## 4. Kritieke Strip en Nulpunten hierin

In dit hoofdstuk zullen we preciezer gaan kijken waar de niet-triviale nulpunten van $\zeta$ liggen. We zagen al (Gevolg 3.7) dat er in het halfvlak $D := \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\}$ geen nulpunten van $\zeta$ liggen. In dit hoofstuk zullen we het mogelijke gebied waar deze nulpunten kunnen voorkomen nog meer verkleinen tot $K := \{s \in \mathbb{C} : \ 0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1\}$. $K$ wordt de *kritieke strip* genoemd. Vervolgens zullen we een asymptotische formule bewijzen voor het aantal nulpunten tot een bepaalde hoogte in deze strip. Deze formule is een sterk resultaat dat Riemann al vermoedde maar niet wist te bewijzen. Deze formule werd later, aan het einde van de 19e eeuw, bewezen door Von Mangoldt. Het bewijzen van deze formule kost aardig wat moeite en we zullen daarom ook het grootste deel van dit hoofdstuk daar mee bezig zijn.




Figuur 1. De kritieke strip

### 4.1. Kritieke strip.

We zagen in Gevolg 3.7 dat $\zeta$ geen nulpunten heeft op het halfvlak $D := \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\}$. Als we dit combineren met de functionaalvergelijking van Stelling 2.13 kunnen we laten zien dat alle mogelijke, niet-triviale, nulpunten van $\zeta$ in de kritieke strip $K := \{s \in \mathbb{C} : \ 0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1\}$ liggen.

**Stelling 4.1.** *Alle niet-triviale nulpunten van $\zeta$ liggen op de kritieke strip $K$.*

*Bewijs.* Aangezien we bij Gevolg 3.7 hebben laten zien dat er geen nulpunten liggen in het halfvlak $D := \{s \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}(s) > 1\}$, rest ons te laten zien dat alle nulpunten in het halfvlak $A := \{s \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}(s) < 0\}$ triviale nulpunten zijn.

Neem daarom $s_0 \in A$ en neem aan dat $\zeta(s_0) = 0$. We zullen laten zien dat $s_0$ een triviaal nulpunt moet zijn. Als we de functionaalvergelijking van Stelling 2.13 omschrijven vinden we:

$$0 = \zeta(s_0) = \frac{\Gamma\left(\frac{1-s_0}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s_0}{2}\right)} \pi^{-\frac{1}{2}} \pi^{s_0} \zeta(1 - s_0)$$

Als de term rechts nul moet zijn, dan moet één van die factoren nul zijn. We zullen deze factoren één voor één bekijken:

- $\Gamma\left(\frac{1-s_0}{2}\right)$: De $\Gamma$-functie heeft geen nulpunten, dus $\Gamma\left(\frac{1-s_0}{2}\right) \neq 0$.
- $\Gamma\left(\frac{s_0}{2}\right)^{-1}$: Deze is gelijk aan nul als $\dfrac{s_0}{2}$ een pool is van $\Gamma$. Met de voorwaarde $\mathrm{Re}(s_0) < 0$ meegenomen, is dit het geval als $s_0 = -2k,\ k \in \mathbb{N}$. Dit zijn precies de triviale nulpunten van $\zeta$. Dus $\Gamma\left(\frac{s_0}{2}\right)^{-1} = 0$ als $s_0$ een triviaal nulpunt van $\zeta$ is.
- $\pi^{-\frac{1}{2}}$: dit is een constante ongelijk aan nul.
- $\pi^{s_0}$: Er geldt: $|\pi^{s_0}| = \pi^{\mathrm{Re}(s_0)} > 0$, dus ook $\pi^{s_0} \neq 0$
- $\zeta(1-s_0)$: Aangezien $\mathrm{Re}(s_0) < 0$ volgt dat $\mathrm{Re}(1-s_0) > 1$. Vanwege Gevolg 3.7 geldt daarom dat: $\zeta(1-s_0) \neq 0$.

We vinden dus dat alleen de factor $\Gamma\left(\frac{s_0}{2}\right)^{-1}$ ervoor kan zorgen dat $\zeta(s_0) = 0$. Maar dit is alleen het geval als $s_0$ een triviaal nulpunt van $\zeta$ is. Er volgt dat $\zeta$ geen nulpunten in $A$ heeft op de triviale nulpunten na.

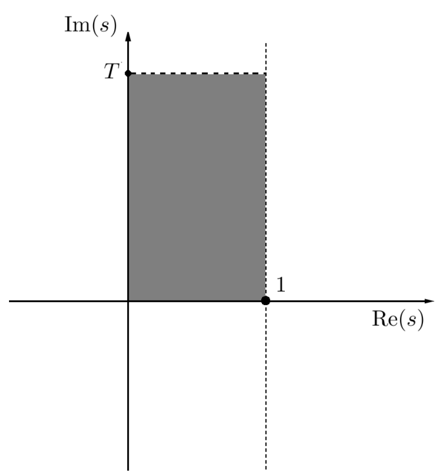
We kunnen nu concluderen dat alle niet-triviale nulpunten op de kritieke strip
$K := \{s \in \mathbb{C} :\ 0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1\}$ moeten liggen.

$\square$

4.2. **Nulpunten op de Kritieke Strip.**

Nu we weten dat alle niet-triviale nulpunten op de kritieke strip moeten liggen, is een volgende interessante vraag hoeveel dat er dan zijn. We gaan met een asymptotische formule het aantal nulpunten tot een bepaalde hoogte op de kritieke strip benaderen. Laat $N(T)$ het aantal nulpunten op de kritieke strip zijn dat ligt in het deel van de strip met imaginair deel tussen 0 en T:

**Definitie 4.2.** $N(T) = \#\{s : \zeta(s) = 0 \ \textit{met} \ \ 0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1,\ 0 \leq \mathrm{Im}(s) \leq T\}$




FIGUUR 2. N(t) is het aantal nulpunten in het grijze gebied

Het is interessant om te kijken hoe $N(T)$ groeit als $T$ heel groot wordt ($N(T)$ kan natuurlijk geen dalende functie zijn). We zullen laten zien dat $N(T)$ onbegrensd is en groeit met een snelheid van $\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi e}$:

**Stelling 4.3.** $N(T) = \frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi e} + \mathcal{O}(\ln T),\ T \geq 2$

Dit betekent dus dat er oneindig veel nulpunten van de $\zeta$-functie op de kritieke strip liggen! Voordat we met dit bewijs gaan beginnen hebben we de $\xi$-functie nodig:

**Definitie 4.4.** $\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$

Deze functie wordt veel gebruikt als het over de $\zeta$-functie gaat. $\xi$ heeft namelijk een aantal fijne eigenschappen die ik hieronder zal bewijzen. $\xi$ heeft bijna dezelfde nulpunten als de $\zeta$-functie en gedraagt zich een stuk fijner. $\xi$ is zo geconstrueerd dat hij geen polen heeft en dat er geldt $\xi(s) = \xi(1-s)$. Dit laatste komt voort uit de functionaalvergelijking van Stelling 2.13. Vandaar dat de $\Gamma$-functie en de '$\pi^{-\frac{s}{2}}$'-term in de $\xi$-functie terug komen. Deze nuttige eigenschappen staan samengevat in het volgende lemma.

**Lemma 4.5.**

*(i)* $\xi(1-s) = \xi(s)$.

*(ii)* $\xi(\overline{s}) = \overline{\xi(s)}$.

*(iii)* $\xi$ *en* $\zeta$ *hebben dezelfde nulpunten op de triviale nulpunten van* $\zeta$ *(zie Gevolg 2.11) na.*

*(iv)* $\xi$ *is analytisch op heel* $\mathbb{C}$ *en is dus een gehele functie.*

*Bewijs.*
(i) Dit volgt uit de functionaalvergelijking van Stelling 2.13.

$$\begin{aligned}\xi(1-s) &= \frac{1}{2}(1-s)(1-s-1)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)\\ &\underbrace{=}_{Stelling\ (2.13)} \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \xi(s)\end{aligned}$$

(ii) We passen eigenschappen van de geconjugeerde toe, een overzicht van rekenregels hiervoor staat in bijlage B. Daarnaast gebruiken we dat $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\overline{s})$ (Lemma 1.2) en $\overline{\Gamma(s)} = \Gamma(\overline{s})$ (Bijlage A).

$$\begin{aligned}\xi(\overline{s}) =& \frac{1}{2}\overline{s}(\overline{s}-1)\pi^{-\frac{\overline{s}}{2}}\Gamma\left(\frac{\overline{s}}{2}\right)\zeta(\overline{s}) = \frac{1}{2}\overline{s}\,\overline{(s-1)}\,\overline{\pi^{-\frac{s}{2}}}\,\overline{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\,\overline{\zeta(s)}\\ =& \overline{\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)} = \overline{\xi(s)}.\end{aligned}$$

(iii). Er zouden verschillen in nulpunten kunnen komen tussen $\zeta$ en $\xi$ door de term '$\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$'. $\xi$ kan extra nulpunten krijgen als deze term nulpunten heeft waar $\zeta$ geen nulpunten heeft. $\xi$ kan minder nulpunten krijgen als nulpunten van $\zeta$ worden opgeheven door polen van deze term.

Als eerste mogelijke extra nulpunten. $\pi^{-\frac{s}{2}}$ en $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ hebben geen nulpunten en de nulpunten van $s$ en $s-1$ worden opgeheven door de polen van respectievelijk $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ bij $s = 0$ en $\zeta(s)$ bij $s = 1$. Dus $\xi$ heeft in ieder geval niet meer nulpunten dan $\zeta$.

Dan nu nulpunten van $\zeta$ die mogelijk worden opgeheven door polen van de term '$\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$'. Deze term heeft polen door de $\Gamma$-functie. $\Gamma(s)$ heeft simpele polen bij $s = -k, k \in \mathbb{N}_0$. Dus $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ heeft simpele polen bij $s = -2k, k \in \mathbb{N}_0$. De pool bij $s = 0$ wordt opgeheven door het nulpunt van $s$. De overige polen worden opgeheven door de triviale nulpunten van de $\zeta$-functie. Dus de term zorgt wel voor het opheffen van nulpunten, maar dit zijn alleen de triviale nulpunten van $\zeta$.

Dus de term '$\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$' zorgt niet voor meer nulpunten, maar hij zorgt er wel voor dat de triviale nulpunten van de $\zeta$-functie worden opgeheven. Dus we concluderen dat $\xi$ en $\zeta$ dezelfde nulpunten hebben op de triviale nulpunten van $\zeta$ na.

(iv). We zagen net al dat de simpele pool van de $\zeta$-functie bij $s = 1$ wordt opgeheven door het nulpunt van $s-1$. En we zagen ook al dat de simpele polen van $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ worden opgeheven door het nulpunt van $s$ en de triviale nulpunten van de $\zeta$-functie. We concluderen dus dat $\xi$ geen polen heeft en dus analytisch is op heel $\mathbb{C}$. □

We hebben naast deze eigenschappen van de $\xi$-functie ook een stelling uit de complexe analyse nodig voor het bewijs. Deze wordt het argumentprincipe genoemd.

**Stelling 4.6** (Argument Principe). *Als $f$ een meromorfe functie is op een gebied $D$ en $\alpha$ een gesloten kromme is in $D$ met positieve oriëntatie (dus tegen de klok in) die niet door nulpunten of polen van $f$ gaat, dan geldt:*

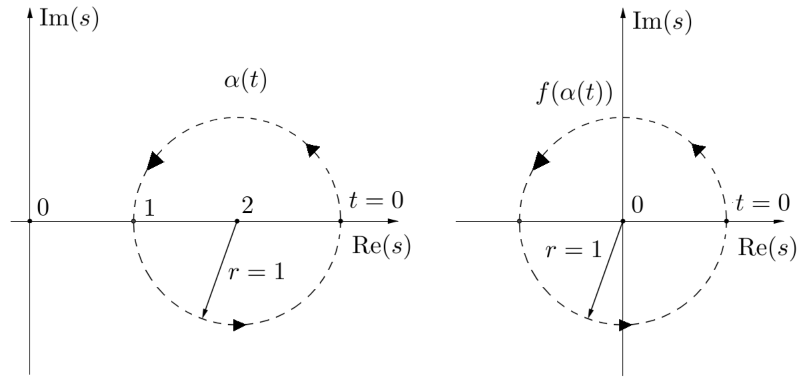
$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\alpha \arg f = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{f'(s)}{f(s)}\mathrm{d}s = N_0(f) - N_p(f),$$

*waarbij $N_0(f)$ en $N_0(f)$ respectievelijk het aantal nulpunten en aantal polen zijn van $f(z)$ binnen $\alpha$ met ordes meegenomen en $\Delta_\alpha \arg f$ de totale argumentverandering van $f(s)$ is als $s$ de kromme $\alpha$ doorloopt.*

Om deze stelling te verduidelijken zal ik een voorbeeld geven waar we deze stelling kunnen gebruiken.

*Voorbeeld* 4.7. We nemen $f(s) = s-2$ en $\alpha(t) = 2 + e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$, de cirkel om $s = 2$ met straal 1. Ik zal voor alle drie de manieren van het argumentprincipe laten zien wat er gebeurt.

Als eerste de argumentsverandering. Hieronder staan $\alpha$ en het pad dat $f(s)$ aflegt als $s$ de kromme $\alpha$ doorloopt.




FIGUUR 3. De kromme $\alpha$ (links) en $f(s)$ als $s$ de kromme $\alpha$ doorloopt (rechts)

We zien dat $f(s)$ als $s$ de kromme $\alpha$ doorloopt precies één keer tegen de klok in een rondje om 0 maakt. Dus de argumentsverandering van $f$ is $2\pi$. Dus

$$\Delta_\alpha \arg f = 2\pi \implies \frac{1}{2\pi}\Delta_\alpha \arg f = 1.$$

Verder vinden voor het tweede gedeelte van het argument principe

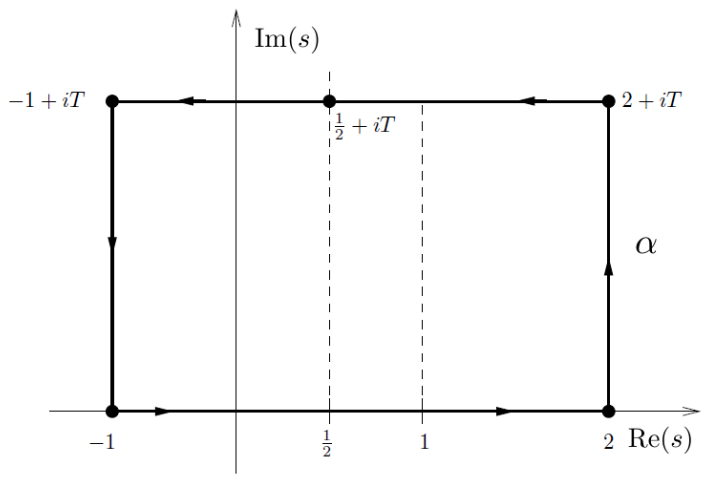
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{f'(s)}{f(s)}\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{1}{s-2}\mathrm{d}s &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+e^{it}-2} ie^{it}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1 \; dt = \frac{2\pi}{2\pi} = 1.\end{aligned}$$

Als laatste weten we dat $f(s) = s - 2$ geen polen heeft, maar wel één nulpunt van orde 1 bij $s = 2$. Dit nulpunt ligt binnen $\alpha$, dus $N_0(f) = 1$. We vinden

$$N_0(f) - N_p(f) = 1.$$

Dus op alle drie de verschillende manieren vinden we het antwoord 1.

We gaan dit argument principe toepassen op $\xi$. Het argument principe zegt namelijk iets over nulpunten in een gebied dat een kromme insluit. We willen uiteindelijk de nulpunten in de kritieke strip tot een bepaalde hoogte weten. We gaan dus een kromme kiezen waar dat deel van de kritieke strip in ieder geval binnen ligt. De gesloten kromme $\alpha$ die we kiezen komt misschien een beetje uit de lucht vallen, maar een goede keuze hiervoor is de rechthoek met hoekpunten $2,\ 2 + iT, -1 + iT, -1$. Deze kromme is hieronder te zien:




FIGUUR 4. De kromme $\alpha$

Voor deze $\xi$ en $\alpha$ geldt hetvolgende lemma.

**Lemma 4.8.** *Laat $\alpha$ de kromme zijn die de rechthoek met hoekpunten* $2$, $2+iT, -1+iT, -1$ *doorloopt met positieve oriëntatie. Dan geldt*

$$N(T) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\alpha \arg \xi$$

*Bewijs.* We kunnen het argument principe alleen toepassen als de kromme $\alpha$ niet door nulpunten/polen van $\xi$ gaat. Uit Lemma 4.5 volgt dat $\xi$ geen polen heeft en ook dat $\xi$ dezelfde nulpunten heeft als $\zeta$ op de triviale nulpunten na. Maar merk op dat de triviale nulpunten van de $\zeta$-functie buiten de kromme $\alpha$ liggen. Dus als $\xi$ een nulpunt op $\alpha$ heeft, moet $\zeta$ daar ook een nulpunt hebben. Aangezien $\zeta$ alleen nulpunten heeft in de kritieke strip (Stelling 4.1) kunnen nulpunten op $\alpha$ alleen voorkomen op de twee horizontale lijnen van $\alpha$ met reëel deel tussen 0 en 1. De onderste lijn loopt over de reële as en daar heeft $\zeta$ geen nulpunten (Gevolg 3.13). De lijn op hoogte $T$ zou eventueel nulpunten kunnen hebben. Maar aangezien $\zeta$ niet identiek 0 is, is er dan altijd een lijn met hoogte $T' = T + \epsilon$ met $\epsilon$ willekeurig klein, waar geen nulpunten liggen. Dan kiezen we $T = T'$ en loopt $\alpha$ niet door nulpunten van $\zeta$ en dus ook niet door nulpunten van $xi$. We kunnen het argument principe dus toepassen op $\xi(s)$ en de kromme $\alpha$.

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\alpha \arg \xi = N_0(f) - N_p(f).$$

Aangezien $\xi(s)$ geen polen heeft geldt er: $N_p(\xi) = 0$.

Omdat $\xi(s)$ en $\zeta(s)$ dezelfde nulpunten hebben op de triviale nulpunten na en deze triviale nulpunten buiten $\alpha$ liggen geldt er $N_0(\xi) = N_0(\zeta)$.

De $\zeta$-functie heeft naast de triviale nulpunten alleen nulpunten in de kritieke strip. Dus we kunnen ons voor $N_0(\zeta)$ beperken tot het kijken naar het deel van de kritieke strip dat binnen de kromme $\alpha$ ligt. Dit is het deel van de kritieke strip met imaginair deel tussen 0 en $T$. $N_0(\zeta)$ is dus het aantal nulpunten op het deel van de kritieke strip met imaginair deel tussen 0 en $T$. Dat is precies de definitie van $N(T)$. Dus $N_0(\xi) = N_0(\zeta) = N(T)$.

We vinden

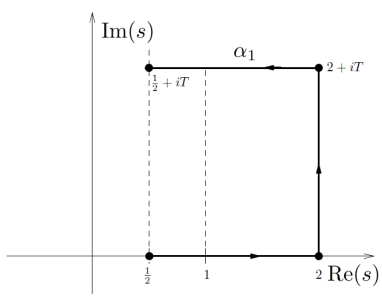
$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\alpha \arg \xi = N_0(\xi) - N_p(\xi) = N(T) - 0 = N(T). \qquad \square$$

We kunnen de uitdrukking van het lemma hierboven nog verder versimpelen vanwege symmetrie van $\xi$ in $1-s$.

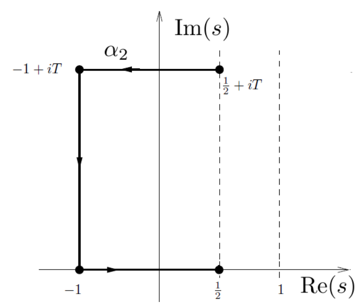
**Lemma 4.9.** *Laat $\alpha_1$ het deel van de kromme $\alpha$, gegeven in figuur 4.2, zijn die in rechte lijnen loopt van $\frac{1}{2} \to 2 \to 2+iT \to \frac{1}{2}+iT$. Dan geldt*

$$N(T) = \frac{1}{\pi}\Delta_{\alpha_1} \arg \xi.$$

*Bewijs.* We beginnen met $\alpha$ opdelen in $\alpha_1$ en $\alpha_2$. Laat $\alpha_1$ het eerste deel van de kromme zijn zoals beschreven in het lemma en laat $\alpha_2$ de rest van $\alpha$ zijn. Zie hieronder een plaatje van $\alpha_1$ en $\alpha_2$.




Figuur 5. De kromme $\alpha_1(t)$




Figuur 6. De kromme $\alpha_2(t)$

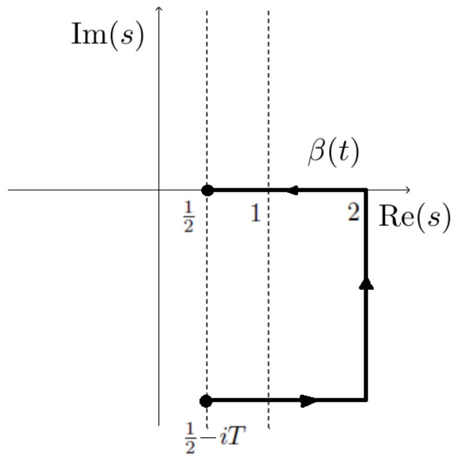
$\alpha_2$ loopt dus met rechte lijnen via de volgende punten:

$$\frac{1}{2}+iT \to -1+iT \to -1 \to \frac{1}{2}.$$

Als we op dit gedeelte gebruiken dat $\xi(s) = \xi(1-s)$ dan vinden we dat $\xi$ doorlopen op $\alpha_2$ hetzelfde is als de kromme $\beta$ doorlopen met rechte lijnen tussen de volgende punten:

$$\begin{aligned} &1-(\frac{1}{2}+iT) \to 1-(-1+iT) \to 1-(-1) \to 1-\frac{1}{2} \\ \iff &\frac{1}{2}-iT \to 2-iT \to 2 \to \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

In het figuur hieronder kan je zien hoe $\beta$ eruit ziet:




Figuur 7. De kromme $\beta$

We zien dus dat $\xi$ doorlopen op $\alpha_2$ hetzelfde is als $\xi$ doorlopen op $\beta$. We gaan nu gebruiken dat:

- $\arg \overline{f} = -\arg f$.
- $\xi(\overline{s}) = \overline{\xi(s)}$ (Lemma 4.5).

We willen weten wat de argumentsverandering van $\xi$ is op $\beta$. Vanwege het eerste punt hierboven geldt

$$\Delta_\beta \arg \xi = -\Delta_\beta \arg \overline{\xi}.$$

Er geldt vanwege het tweede punt hierboven dat $\overline{\xi}$ doorlopen hetzelfde is als $\xi$ doorlopen op $\beta$ geconjugeerd '$\overline{\beta}$'. Deze kromme $\overline{\beta}$ loopt in rechte lijnen via de punten

$$\begin{aligned} &\overline{\frac{1}{2} - iT} \to \overline{2 - iT} \to \overline{2} \to \overline{\frac{1}{2}} \\ \Longleftrightarrow\ &\frac{1}{2} + iT \to 2 + iT \to 2 \to \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dit is precies de kromme $\alpha_1$ maar dan in tegenovergestelde richting doorlopen. Dus $\overline{\beta} = -\alpha_1$. We vinden

$$\Delta_\beta \arg \xi = -\Delta_\beta \arg \overline{\xi} = -\Delta_{\overline{\beta}} \arg \xi = -\Delta_{-\alpha_1} \arg \xi = \Delta_{\alpha_1} \arg \xi.$$

Als we dit gebruiken voor de argumentsverandering van $\xi$ over heel $\alpha$ vinden we:

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha \arg \xi &= \Delta_{\alpha_1} \arg \xi + \Delta_{\alpha_2} \arg \xi = \Delta_{\alpha_1} \arg \xi + \Delta_\beta \arg \xi \\ &= 2\Delta_{\alpha_1} \arg \xi \end{aligned}$$

Als we nu Lemma 4.8 gebruiken vinden we

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} 2\Delta_{\alpha_1} \arg \xi = \frac{1}{\pi} \Delta_{\alpha_1} \arg \xi. \qquad \square$$

We hebben nu dus een uitdrukking voor $N(t)$ in de vorm van een argumentsverandering van $\xi$. Maar hoe reken je zo'n argumentsverandering uit? In voorbeeld 4.7 rekende ik dit grafisch uit. Maar zoals we straks zullen zien kan dit niet bij elke functie. We weten bijvoorbeeld niet precies hoe het beeld van $\Gamma(\frac{s}{2})$ eruitziet als $s$ de kromme $\alpha_1$ doorloopt. Gelukkig is er een andere manier om $\Delta \arg$ van een functie uit te rekenen. Hiervoor hebben we een stelling nodig uit de complexe analyse.

**Stelling 4.10.** *Laat $f: D \to \mathbb{C}$ een analytische functie zijn op een elementair gebied en $f(s) \neq 0$ voor alle $s \in D$. Dan is er een analytische functie $h: D \to \mathbb{C}$ met de eigenschap:*

$$f(s) = e^{h(s)}$$

*Deze functie $h$ wordt de analytische tak van de logaritme van $f$ genoemd. Voor deze $h$ geldt dat*

$$h(s) = F(s) + c \tag{4.1}$$

*voor een zekere $c \in \mathbb{C}$ en waarbij $F$ een primitieve van $\frac{f'}{f}$ is.*

Deze stelling is nuttig omdat deze zegt hoe we een functie $h$ kunnen bepalen waarmee we het argument van een functie $f$ kunnen bepalen. Want er geldt

$$f(s) = e^{h(s)} = e^{\operatorname{Re} h(s)} e^{i \operatorname{Im} h(s)} = |f(s)| e^{i \arg f(s)}.$$

Dus $\operatorname{Im} h(s) = \arg f(s)$. En aangezien $h$ analytisch is, is deze ook continu. We kunnen voor $\Delta_\alpha \arg f$ dus kijken naar het imaginaire deel van $h(s)$ in het eindpunt van $\alpha$, zeg $\alpha_t$, min het imaginaire deel van $h(s)$ in het beginpunt van $\alpha$, zeg $\alpha_s$:

$$\Delta_\alpha \arg f = \operatorname{Im} h(\alpha_t) - \operatorname{Im} h(\alpha_s).$$

Dit resultaat staat in het Gevolg hieronder.

**Gevolg 4.11.** *Laat $f: D \to \mathbb{C}$ een analytische functie zijn op een elementair gebied en $f(s) \neq 0$ voor alle $s \in D$. Laat verder $\beta$ een willekeurige kromme door $D$ met beginpunt $\beta_s$ en eindpunt $\beta_t$ zijn, en laat $h$ een primitieve van $\frac{f'}{f}$ zijn. Dan geldt*

$$\Delta_\alpha \arg f = \operatorname{Im} h(\beta_t) - \operatorname{Im} h(\beta_s).$$

*Opmerking* 4.12. Merk op dat de constante $c$ uit Stelling 4.10 niet uitmaakt hier. We kijken namelijk naar het verschil tussen twee punten van $h$ waardoor deze constante tegen zichzelf wegvalt. We mogen dus een willekeurige primitieve kiezen.

We hebben nu nog één laatste lemma nodig voordat we klaar zijn om Stelling 4.3 te bewijzen. Deze afschatting gaat over de argumensverandering van $\zeta$.

**Lemma 4.13.** *Laat $\beta$ de kromme zijn die in rechte lijnen loopt van $2 \to 2 + iT \to \frac{1}{2} + iT$. Dan geldt*

$$\Delta_\beta \arg \zeta = \mathcal{O}(\ln T).$$

Voor dit lemma zal ik geen bewijs geven. De bewijzen ervan zijn meestal lang en erg technisch. Zelfs Riemann kon geen bewijs bedenken en nam deze afschatting aan in zijn beroemde artikel "*Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*". De geïnteresseerden in het bewijs verwijs ik graag door naar bijvoorbeeld Titschmarsch of Iwaniec.

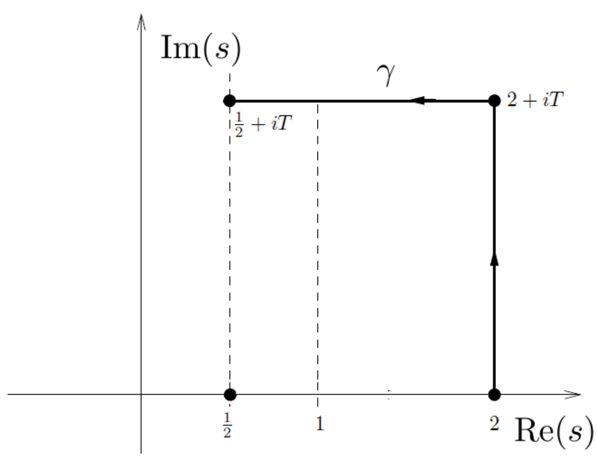
Met dit lemma zijn we klaar om Stelling 4.3 te bewijzen.

***Bewijs van Stelling 4.3.***

We gebruiken Lemma 4.9. Deze zegt
$$N(T) = \frac{1}{\pi}\Delta_{\alpha_1} \arg \xi,$$
waarbij $\alpha_1$ te zien is in figuur 4.2. We moeten dus gaan kijken hoe het argument van $\xi(s)$ verandert als $s$ de kromme $\alpha_1$ doorloopt.

We bekijken eerst wat $\xi$ doet op het eerste stuk van $\alpha_1$ over de reële as van $\frac{1}{2}$ tot 2. Noem dit deel van de kromme $\alpha_3$. Als $x \in \mathbb{R}$, dan geldt
$$\xi(x) = \frac{1}{2}x(x-1)\pi^{-\frac{x}{2}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\zeta(x) \in \mathbb{R},$$
want $\frac{1}{2}x(x-1)\pi^{-\frac{x}{2}} \in \mathbb{R}$ en ook de $\Gamma$-functie en $\zeta$-functie zijn reëlwaardig voor reële $x$ (respectievelijk bijlage A en Gevolg 2.11). Aangezien $\xi$ continu is en geen nulpunten heeft op de kromme $\alpha_3$ (zie bewijs van Lemma 4.8), neemt $\xi$ daar dus maar 1 teken aan. Het argument van $\xi(s)$ verandert daarom niet als $s$ de kromme $\alpha_3$ doorloopt. Dus $\Delta_{\alpha_3} \arg \xi = 0$.

We moeten dus kijken wat $\xi$ doet op het tweede deel van $\alpha_1$ dat gaat van $2 \to 2 + iT \to \frac{1}{2} + iT$. We noemen deze kromme $\gamma$.




FIGUUR 8. De kromme $\gamma$

Voor een complexe functie geldt
$$\arg(f \cdot g) = \arg f + \arg g.$$
We kunnen dus kijken naar de argumentsverandering van de verschillende termen van $\xi$ op $\gamma$ en deze bij elkaar optellen:
$$\Delta_\gamma \arg \xi = \Delta_\gamma \arg s + \Delta_\gamma \arg(s-1) + \Delta_\gamma \arg \pi^{-\frac{s}{2}} + \Delta_\gamma \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) + \Delta_\gamma \arg \zeta(s) \tag{4.2}$$

We gaan elke term apart bekijken.

**s en s-1**: We gaan dit grafisch bekijken. Het beeld van $s$ onder $\gamma$ is precies $\gamma$ zelf. Het argument van $s$ loopt dus van 0 naar het argument van $\frac{1}{2} + iT$. Deze argumentsverandering is gelijk aan $\frac{1}{2}\pi$ minus de hoek tussen $\frac{1}{2} + iT$ en de imaginaire as. Noem deze hoek $\alpha$. Dus

$$\Delta_\gamma \arg s = \frac{1}{2}\pi - \alpha$$

Het beeld van $s-1$ onder $\gamma$ is $\gamma$ maar dan 1 naar links verplaatst. Dus de kromme die loopt van 1 via $1 + iT$ naar $-\frac{1}{2} + iT$. De argumentsverandering is dan $\frac{1}{2}\pi$ plus de hoek tussen de imaginaire as en $-\frac{1}{2} + iT$. Deze hoek is hetzelfde als de $\alpha$ van de alinea hierboven. Dus:

$$\Delta_\gamma \arg(s-1) = \frac{1}{2}\pi + \alpha$$

Hieruit volgt dat $s$ en $s-1$ samen een argumentsverandering hebben van:

$$\Delta_\gamma \arg s + \Delta_\gamma \arg(s-1) = \frac{1}{2}\pi - \alpha + \frac{1}{2}\pi + \alpha = \pi$$

$\boldsymbol{\pi^{-\frac{s}{2}}}$: Aangezien deze functie analytisch is en ook geen nulpunten heeft op een elementair gebied waar $\gamma$ in ligt, kunnen we Gevolg 4.11 gebruiken. Hiervoor moeten we de functie $h$ bepalen welke een primitieve is van

$$\frac{\left(\pi^{-\frac{s}{2}}\right)'}{\pi^{-\frac{s}{2}}} = \frac{-\frac{1}{2}\ln(\pi)\pi^{-\frac{s}{2}}}{\pi^{-\frac{s}{2}}} = -\frac{1}{2}\ln(\pi)$$

We kiezen de meest voor de hand liggende $h$, namelijk

$$h(s) = -\frac{s}{2}\ln(\pi)$$

$\gamma$ loopt van 2 naar $\frac{1}{2} + iT$, dus Gevolg 4.11 toepassen geeft

$$\Delta_\gamma \arg \pi^{-\frac{s}{2}} = \operatorname{Im} h(\frac{1}{2} + iT) - \operatorname{Im} h(2) = -\frac{T}{2}\ln(\pi) - 0 = -\frac{T}{2}\ln(\pi).$$

$\boldsymbol{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$: Aangezien $\Gamma$ alleen polen heeft op de negatieve reële as, is $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ analytisch op het elementaire gebied dat bestaat uit alle complexe getallen met positief reëel deel. In dit gebied ligt ook onze kromme $\gamma$. Aangezien $\Gamma$ geen nulpunten heeft kunnen we ook hier Gevolg 4.11 gebruiken. De functie $h$, de analytische tak van de logaritme van $\Gamma$, die we hier zoeken is een bekende functie uit de complexe analyse en wordt de $\log\Gamma$-functie genoemd. Voor deze functie is een asymptotische formule bekend op verticale strippen als het imaginaire deel naar $\infty$ gaat (Bijlage A).

$$\log\Gamma(\sigma + it) = (\sigma + it - \frac{1}{2})\log(it) - it + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)$$

. Wij zijn geïnteresseerd in het imaginaire deel van deze functie,

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left(\log\Gamma(\sigma + it)\right) &= t\ln|it| + (\sigma - \frac{1}{2})\arg it - t + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)\\ &= t\ln t + (\sigma - \frac{1}{2})\frac{\pi}{2} - t + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right).\end{aligned}$$

We gaan deze formule toepassen voor $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$. Maar de formule geldt alleen als $t \to \infty$, dus we kunnen hier niet zomaar ons startpunt van $\gamma$, $s = 2$, invullen. Wel weten we dat $\log \Gamma(\frac{x}{2})$ reëel is voor reële $x$ (Bijlage A), dus het imaginaire deel van $\log \Gamma(1)$ is 0. Als we nu (4.11) toepassen krijgen we

$$\begin{aligned}
\Delta_\gamma \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \arg \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + iT\right)\right) - \arg \Gamma(1) = \operatorname{Im}\left(\log \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + iT\right)\right)\right) - 0 \\
&= \frac{T}{2} \ln \frac{T}{2} + (\frac{1}{4} - \frac{1}{2})\frac{\pi}{2} - \frac{T}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\frac{T}{2}}\right) \\
&= \frac{T}{2} \ln \frac{T}{2} - \frac{\pi}{8} - \frac{T}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right).
\end{aligned}$$

Als we nu $\Delta_\gamma \arg \zeta = S(T)$ noemen, dan vinden we

$$\begin{aligned}
N(T) &= \frac{1}{\pi}\left(\Delta_\gamma \arg \xi\right) = \frac{1}{\pi}\left(\Delta_\gamma \arg s + \Delta_\gamma \arg(s-1) + \Delta_\gamma \arg \pi^{-\frac{s}{2}} + \Delta_\gamma \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) + \Delta_\gamma \arg \zeta(s)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\pi + \frac{1}{\pi}\left(-\frac{T}{2}\ln(\pi)\right) + \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{T}{2}\ln\frac{T}{2} - \frac{T}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right)\right) + \frac{1}{\pi}S(T) \\
&= \frac{7}{8} + \frac{T}{2\pi}\left(-\ln \pi + \ln \frac{T}{2} - 1\right) + \frac{1}{\pi}S(T) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right) \\
&= \frac{7}{8} + \frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi e} + \frac{1}{\pi}S(T) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right).
\end{aligned}$$

Aangezien we via Lemma 4.13 weten dat $S(T) = \mathcal{O}(\ln T)$, vinden we

$$N(T) = \frac{7}{8} + \frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi e} + \frac{1}{\pi}\mathcal{O}(\ln T) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi e} + \mathcal{O}(\ln T). \qquad \square$$

## 5. Stelling van Hardy

5.1. **Introductie.** We hebben gezien dat er oneindig veel nulpunten van de $\zeta$-functie op de kritieke strip liggen. De beroemde Riemann-hypothese zegt dat voor al deze nulpunten '$s$' moet gelden dat $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$. De lijn door het complexe vlak $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ waarop al deze nulpunten liggen moeten liggen volgens de Riemann-hypothese wordt de *kritieke lijn* genoemd.

In dit hoofdstuk zal ik een stelling bewijzen uit het begin van de 20$^{\mathrm{e}}$ eeuw van de Britse wiskundige G.H. Hardy. Deze bewees dat er oneindig veel nulpunten op deze kritieke lijn liggen. Merk op dat dit nog lang niet genoeg is om de Riemann-hypothese te bewijzen. Als er oneindig veel nulpunten op de kritieke lijn liggen kunnen er nog steeds oneindig veel nulpunten naast deze lijn liggen. Desalniettemin is de stelling een sterk resultaat.

Het idee van het bewijs van deze Stelling van Hardy is relatief simpel. We gaan een reële functie $Z$ maken die dezelfde nulpunten heeft als $\zeta$ op de kritieke lijn. Vervolgens nemen we aan dat deze functie $Z$ maar een eindig aantal keer van teken wisselt, waardoor de tussenwaardestelling zou impliceren dat $Z$ maar een eindig aantal reële nulpunten heeft. We zullen vervolgens een tegenspraak afleiden om daarmee de stelling te bewijzen.

Het idee van het bewijs is dus relatief eenvoudig, echter hangt het bewijs af van de uitkomst van de integraal

$$\lim_{\alpha \to \frac{1}{4}\pi} \int_0^\infty \frac{Z(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} t^{2n} \cosh(\alpha t) \, \mathrm{d}t, \tag{5.1}$$

en gaan hier enorm veel technische lemma's aan vooraf. In subsectie 5.3 staan eerst al deze lemma's, en staat daarna in Gevolg 5.14 de uitkomst van de integraal van (5.1). Ik zal bij elk lemma kort beschrijven wat het idee achter het lemma is alvorens ik een bewijs geef. Als deze bewijzen af en toe te technisch worden, hoeft dat dus geen probleem te zijn voor het volgen van het bewijs van de Stelling van Hardy.

5.2. **De functie $Z$.**
Als eerste introduceren we de functie $Z$, die $\xi$ bekijkt op de kritieke lijn.

**Definitie 5.1.**

$$Z(t) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right), \ t \in \mathbb{R}.$$

Deze $Z$ heeft twee hele nuttige eigenschappen.

**Lemma 5.2.**
*i) $Z$ is een even en reële functie.*
*ii) $Z(t)$ heeft dezelfde reële nulpunten als $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$.*

*Bewijs.*
i). Vanwege Lemma 4.5 weten we dat

A): $\xi(\overline{s}) = \overline{\xi(s)}$.
B): $\xi(1-s) = \xi(s)$ .

Er geldt dat $Z$ even is want

$$Z(-t) = \xi\left(\frac{1}{2} - it\right) \underbrace{=}_{B} \xi\left(1 - \left(\frac{1}{2} - it\right)\right) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = Z(t).$$

Er geldt $Z(t) \in \mathbb{R}$ omdat

$$\overline{Z(t)} = \overline{\xi\left(\frac{1}{2} + it\right)} \underbrace{=}_{A} = \xi\left(\overline{\frac{1}{2} + it}\right) = \xi\left(\frac{1}{2} - it\right) = Z(-t) = Z(t),$$

waarbij we in de laatste stap gebruikten dat $Z$ even is.
ii). $\xi$ heeft dezelfde nulpunten in de kritieke strip als $\zeta$ (Lemma 4.5). Dus zeggen dat $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ oneindig veel nulpunten heeft is equivalent met zeggen dat $\xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = Z(t)$ oneindig veel nulpunten heeft. □

Deze eigenschappen zijn van cruciaal belang voor het bewijs van de Stelling van Hardy, aangezien we het probleem van het aantal nulpunten van $\zeta$ op de kritieke lijn nu kunnen reduceren tot het probleem van het aantal nulpunten van een reële functie.

5.3. **De lemma's.**
Nu we deze eigenschappen van $Z$ hebben, gaan we door naar de lemma's. We zullen gaan toewerken naar de integraal

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{Z(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} t^{2n} \cosh(\alpha t) \mathrm{d}t.$$

Als eerste hebben we een lemma nodig dat iets zegt over het gedrag van $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$ als het imaginaire deel van $s$ heel groot wordt.

**Lemma 5.3.** *Laat* $s \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ *met* $\mathrm{Re}(s) > 0$. *Dan geldt voor een zekere* $A \in \mathbb{R}$ *dat*

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \mathcal{O}\left(\mathrm{Im}(s)^A e^{-\frac{\pi}{4}|\,\mathrm{Im}(s)|}\right) \text{ als } \mathrm{Im}(s) \to \infty.$$

*Bewijs.* Neem $s \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ met $\mathrm{Re}(s) > 0$. Dan geldt

$$|\pi^{-\frac{s}{2}}| = \pi^{-\frac{1}{2}\mathrm{Re}(s)},$$

Dus $\pi^{-\frac{s}{2}}$ blijft begrensd als $\mathrm{Im}(s) \to \infty$.
Verder weten we via Gevolg 3.15 dat

$$\zeta(s) = \mathcal{O}\left(\mathrm{Im}(s)\right) \text{ als } \mathrm{Im}(s) \to \infty.$$

Dan moeten we als laatste nog kijken naar het asymptotische gedrag van $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$. In Bijlage A vinden we dat als $\mathrm{Im}(s) \to \infty$, er geldt

$$\Gamma(s) = |\,\mathrm{Im}(s)|^{\mathrm{Re}(s) + i\,\mathrm{Im}(s) - \frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\pi|\,\mathrm{Im}(s)|} e^{i(\frac{1}{2}\pi(\mathrm{Re}(s) - \frac{1}{2}) - \mathrm{Im}(s))}\sqrt{2\pi}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mathrm{Im}(s)}\right)\right).$$

Hieruit volgt

$$\left|\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right| = C\,\mathrm{Im}(s)^{\mathrm{Re}(s) - \frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}\pi|\,\mathrm{Im}(s)|},$$

voor een $C \in \mathbb{R}$. We concluderen dat $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \mathcal{O}\left(\mathrm{Im}(s)^{\mathrm{Re}(s) - \frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}\pi|\,\mathrm{Im}(s)|}\right)$ als $\mathrm{Im}(s) \to \infty$.

Alles samen krijgen we dat

$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \mathcal{O}\left(1\right)\mathcal{O}\left(\operatorname{Im}(s)\right)\mathcal{O}\left(\operatorname{Im}(s)^{\operatorname{Re}(s)-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4}\pi|\operatorname{Im}(s)|}\right)\\ &= \mathcal{O}\left(\operatorname{Im}(s)^{A}e^{-\frac{\pi}{4}|\operatorname{Im}(s)|}\right)\ \text{ als } \operatorname{Im}(s)\to\infty,\end{aligned}$$

voor een zekere $A \in \mathbb{R}$. □

We hebben nu de Mellin-transformatie nodig. Deze transformatie verbindt twee functies aan elkaar met behulp van een integraal. De Mellin-transformatie is vergelijkbaar met de beter bekende Laplace- en Fourier-transformaties.

**Stelling 5.4** (Mellin-transformatie)**.** *De Mellin-transformatie van een functie* $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ *is gegeven door*

$$\{Mf\}(s) = \phi(s) = \int_0^\infty x^{s-1}f(x)\mathrm{d}x,$$

*voor alle* $s \in \mathbb{C}$ *waarvoor deze integraal bestaat. De inverse transformatie wordt gegeven door*

$$\{M^{-1}\phi\}(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\phi(s)x^{-s}\mathrm{d}s,$$

*waarbij* $\phi$ *analytisch moet zijn op een verticale strip* $\{s \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re}(s) < b\}$ *met* $a < c < b$ *en waar* $\phi(s) < K|s|^{-2}$ *als* $\operatorname{Im}(s) \to \infty$ *voor een constante* $K$ *(*$\phi$ *moet snel genoeg naar* $0$ *gaan, anders divergeert de integraal).*

We hebben deze Mellin-transformatie nodig omdat we straks een integraal met de $\Gamma$-functie moeten oplossen. Hier gaat Gevolg 5.5 over.

**Gevolg 5.5.** *Als* $c > 0$*, dan geldt er*

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(s)x^{-s}\mathrm{d}s$$

*Bewijs.* De definitie voor $\Gamma(s)$ als $\operatorname{Re}(s) > 0$, is de Mellin-transformatie van $e^{-x}$:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x.$$

Aangezien $\Gamma(s)$ analytisch is op het halfvlak in $\mathbb{C}$ met reëel deel groter dan 0 en $\Gamma(s)$ negatief exponentioneel groeit als $\operatorname{Im}(s) \to \infty$ (zie bewijs Lemma 5.3), kunnen we de de inverse Mellin-transformatie toepassen en vinden we

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(s)x^{-s}\mathrm{d}s.$$ □

We hebben nu twee technische lemma's nodig waarvoor we de afschatting van Lemma 5.3 nodig hebben. Lemma 5.6 gaat over het verleggen van de contour van een integraal met behulp van de Residuenstelling. Dit hebben we nodig omdat we dan daarna de somrepresentatie van de $\zeta$-functie kunnen gebruiken. Voor de leesbaarheid van het verslag staat het bewijs van Lemma 5.6 in Bijlage C. Lemma 5.7 erna gaat over het verwisselen van een oneindige som en een oneigenlijke integraal en maakt gebruik van de gedomineerde convergentiestelling van Lebesque.

**Lemma 5.6.** *Er geldt voor* $s \in \mathbb{C}$ *met* $-\frac{1}{4}\pi < \mathrm{Im}(s) < \frac{1}{4}\pi$ *en* $y = e^s$ *dat*

$$-\frac{1}{4i\sqrt{y}} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) y^z \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\pi\sqrt{y} - \frac{1}{4i\sqrt{y}} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) y^z \mathrm{d}z.$$

**Lemma 5.7.** *Er geldt voor* $s \in \mathbb{C}$ *met* $-\frac{1}{4}\pi < \mathrm{Im}(s) < \frac{1}{4}\pi$ *en* $y = e^s$ *dat we bij*

$$\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \left(\frac{y}{n\sqrt{\pi}}\right)^z \mathrm{d}z$$

*de volgorde van de oneindige som en oneigenlijke integraal mogen omwisselen.*

*Bewijs.* We mogen de limiet van de som en de integraal hier omwisselen vanwege de gedomineerde onvergentiestelling van Lebesque. Noem

$$g_m(z) = \sum_{n=1}^{m} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \left(\frac{y}{n\sqrt{\pi}}\right)^z,$$

en

$$g(z) = \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) y^z \frac{\pi^2}{6},$$

dan wordt $g_m$ gedomineerd door $g$ voor elke $m \in \mathbb{N}$ op de lijn $2 + it$. Want op die lijn geldt

$$\begin{aligned}
|g_m(z)| &= \left|\sum_{n=1}^{m} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \left(\frac{y}{n\sqrt{\pi}}\right)^z\right| = \left|\pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) y^z \sum_{n=1}^{m} n^{-z}\right| \\
&\leq \left|\pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) y^z\right| \sum_{n=1}^{m} \left|n^{-z}\right| \leq \left|\pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) y^z\right| \sum_{n=1}^{\infty} \left|n^{-z}\right| \\
&= \left|\pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) y^z\right| \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\mathrm{Re}(z)} = \left|\pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) y^z\right| \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \\
&= \left|\pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) y^z\right| \frac{\pi^2}{6} = |g(z)|.
\end{aligned}$$

We gaan bekijken wat $|g(z)|$ doet op de lijn $2 + it$. $|\pi^{-\frac{z}{2}}|$ is begrensd hier en uit het bewijs van Lemma 5.3 en vergelijking (C.2) volgt dat

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) = \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\pi}{4}|\mathrm{Im}(z)|}\right) \text{ als } \mathrm{Im}(z) \to \infty$$

en

$$y^z = \mathcal{O}\left(e^B\right) \text{ als } \mathrm{Im}(z) \to \infty, \text{ met } B < \frac{\pi}{4}|\mathrm{Im}(z)|.$$

Hieruit volgt dat

$$\left|\pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) y^z\right| \frac{\pi^2}{6} = \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\pi}{4}(|\mathrm{Im}(z)|-B)}\right).$$

Dus convergeert de integraal

$$\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} |g(z)| \, \mathrm{d}z,$$

en mogen we wegens de gedomineerde convergentiestelling van Lebesque de limiet van som en integraal omwisselen. □

Met deze lemma's kunnen we een volgend lemma bewijzen dat gaat over een integraal die al onderzocht werd door Ramanujan [8]. Deze integraal lijkt al een beetje op de integraal van (5.1) die we straks nodig hebben.

**Lemma 5.8.** *Voor $s \in \mathbb{C}$ met $-\frac{1}{4}\pi < \mathrm{Im}(s) < \frac{1}{4}\pi$ geldt*

$$\int_0^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}} \cos(st)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\pi\left(e^{\frac{1}{2}s} - 2e^{-\frac{1}{2}s}\omega\left(e^{-2s}\right)\right),$$

*waarbij $\omega$ wordt gegeven door Definitie 2.3.*

*Bewijs.* We beginnen met de integraal omschrijven. Aangezien $\cos(st) = \dfrac{1}{2}\left(e^{ist} + e^{-ist}\right)$, volgt er dat

$$\int_0^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}} \cos(st)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}} e^{ist}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}} e^{-ist}\mathrm{d}t.$$

Noem nu $y = e^s$. Dan vinden we

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}} y^{it}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}} y^{-it}\mathrm{d}t.$$

Aangezien $Z(t)$ een even functie is (Lemma 5.2), volgt er als we bij de meest rechterintegraal hierboven de transformatie $u = -t$ toepassen dat

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}} y^{-it}\mathrm{d}t &= -\frac{1}{2}\int_0^{-\infty} \frac{Z(-u)}{(-u)^2+\frac{1}{4}} y^{iu}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{Z(u)}{u^2+\frac{1}{4}} y^{iu}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Dus we vinden dat

$$\int_0^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}} \cos(st)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}} y^{it}\mathrm{d}t.$$

$Z(t)$ bekijkt $\xi$ in het punt $\frac{1}{2} + it$. De definitie van $\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)$ invullen geeft

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}} y^{it}\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+it)(it-\frac{1}{2})\pi^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}it}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it\right)\zeta(\frac{1}{2}+it)}{t^2+\frac{1}{4}} y^{it}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty \pi^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}it}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it\right)\zeta(\frac{1}{2}+it)y^{it}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Als we nu vervolgens de transformatie $z = \frac{1}{2} + it$ toepassen, vinden we

$$-\frac{1}{4i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)y^{z-\frac{1}{2}}\mathrm{d}z = -\frac{1}{4i\sqrt{y}}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)y^{z}\mathrm{d}z.$$

We willen eigenlijk de somrepresentatie van $\zeta$ van Definitie 1.1 kunnen gebruiken. Dit omdat de integraal dan van de vorm van Gevolg 5.5 wordt, wat later duidelijker zal zijn. Maar we kunnen dit alleen doen als de integraal over de lijn loopt met $\mathrm{Re}(z) > 1$, wat nu niet het geval is aangezien het reële deel $\frac{1}{2}$ is. Via Lemma 5.6 kunnen we echter de contour van de integraal hierboven verleggen naar 'rechts'. Dit geeft

$$-\frac{1}{4i\sqrt{y}}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)y^{z}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\pi\sqrt{y} - \frac{1}{4i\sqrt{y}} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) y^z \mathrm{d}z. \tag{5.2}$$

We kunnen nu de somrepresentatie van $\zeta$ invullen bij de meest rechterterm hierboven.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4i\sqrt{y}} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} f(z)\mathrm{d}z =& \frac{1}{4i\sqrt{y}} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} y^z \mathrm{d}z \\ =& \frac{1}{4i\sqrt{y}} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \left(\frac{y}{n\sqrt{\pi}}\right)^z \mathrm{d}z\end{aligned}$$

Vanwege Lemma 5.7 mogen we hier de oneindige som en oneigenlijke integraal verwisselen. Dit geeft

$$\frac{1}{4i\sqrt{y}} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \left(\frac{y}{n\sqrt{\pi}}\right)^z \mathrm{d}z = \frac{1}{4i\sqrt{y}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \left(\frac{y}{n\sqrt{\pi}}\right)^z \mathrm{d}z.$$

Als we nu de transformatie $z = 2u$ toepassen vinden we

$$\frac{1}{2i\sqrt{y}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \Gamma(u) \left(\frac{y^2}{n^2\pi}\right)^u \mathrm{d}u.$$

Via de inverse Mellin-transformatie (Gevolg 5.5) krijgen we dan

$$\frac{1}{2i\sqrt{y}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \Gamma(u) \left(\frac{n^2\pi}{y^2}\right)^{-u} \mathrm{d}u = \frac{\pi}{\sqrt{y}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{y^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{y}} \omega\left(\frac{n^2\pi}{y^2}\right).$$

Dit invullen in (5.2) en $y = e^s$ weer terug substitueren geeft het gevraagde.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\pi\sqrt{y} - \frac{1}{4i\sqrt{y}} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} f(z)\mathrm{d}z &= \frac{1}{2}\pi\sqrt{y} - \frac{\pi}{\sqrt{y}}\omega\left(\frac{n^2\pi}{y^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\pi\left(e^{\frac{1}{2}s} - 2e^{-\frac{1}{2}s}\omega\left(e^{-2s}\right)\right)\end{aligned}$$

□

We hebben nu twee lemma's nodig die rechtvaardigen waarom we straks differentiëren en een oneigenlijke integraal mogen omwisselen.

**Lemma 5.9.** *Als* $\alpha \in [0, \frac{1}{4}\pi)$ *dan geldt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left\{\int_0^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}} t^n \cosh(\alpha t)\mathrm{d}t\right\} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left\{\frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}} t^n \cosh(\alpha t)\right\} \mathrm{d}t$$

*Bewijs.* Wat er eigenlijk staat links is

$$\lim_{h\to 0} \int_0^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}} t^n \left(\frac{\cosh([\alpha+h]t) - \cosh(\alpha t)}{h}\right) \mathrm{d}t. \tag{5.3}$$

De gedomineerde convergentiestelling van Lebesque zegt dat we de limiet en de oneigenlijke integraal mogen omwisselen als

$$\left|\frac{\cosh([\alpha+h]t) - \cosh(\alpha t)}{h}\right| < g(t)$$

voor alle $h$ klein genoeg en

$$\int_0^\infty \left|\frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}} t^n g(t)\right| \mathrm{d}t < \infty$$

Omdat
$$\lim_{h\to 0} \frac{\cosh([\alpha+h]t)-\cosh(\alpha t)}{h} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\cosh(\alpha t) = t\sinh(\alpha t),$$
is er voor $\varepsilon(t) = \max\{1, t\sinh(\alpha t)\} > 0$ een $\delta > 0$ zodat als $|h| < \delta$ er geldt
$$\left|\frac{\cosh([\alpha+h]t)-\cosh(\alpha t)}{h} - t\sinh(\alpha t)\right| < \varepsilon(t).$$
De omgekeerde driehoeksongelijkheid geeft dan
$$\left|\frac{\cosh([\alpha+h]t)-\cosh(\alpha t)}{h}\right| < \varepsilon(t) + t\sinh(\alpha t) = g(t).$$
Als $\alpha \geq 0$ en $t \to \infty$ geldt $\sinh(\alpha t) = \mathcal{O}\left(e^{\alpha t}\right)$ en dus ook $g(t) = \mathcal{O}\left(e^{\alpha t}\right)$. Dit gecombineerd met Lemma 5.3 geeft dan
$$\frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}} t^n g(t) = \mathcal{O}\left(t^A e^{-t\left(\frac{1}{4}\pi-\alpha\right)}\right) \text{ als } t \to \infty.$$
Aangezien $\alpha < \frac{1}{4}\pi$ volgt uit Lemma 2.5 dat
$$\int_0^\infty \left|\frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}} t^n g(t)\right| \mathrm{d}t < \infty$$
en dus mogen we de limiet en oneigenlijke integraal omwisselen bij (5.3) en zijn we klaar. $\square$

**Lemma 5.10.** *Voor* $\alpha \in [0, \frac{1}{4}\pi)$ *en* $n \in \mathbb{N}$ *geldt*
$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\right)^n \left[\int_0^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}\cosh(\alpha t)\mathrm{d}t\right] = \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\right)^n \left[\frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}\cosh(\alpha t)\right]\mathrm{d}t. \tag{5.4}$$

*Bewijs.* We gaan dit bewijzen met behulp van inductie. Dus (5.4) is onze inductieveronderstelling (IV). Voor $n = 0$ is deze (IV) triviaal. We nemen nu aan dat de (IV) waar is voor een willekeurige $n \in \mathbb{N}$. We willen dat het dan ook waar is voor $n+1$. We krijgen
$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\right)^{n+1} \left[\int_0^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}\cosh(\alpha t)\mathrm{d}t\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\right)^n \left[\int_0^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}\cosh(\alpha t)\mathrm{d}t\right]\right\} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left\{\int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\right)^n \left[\frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}\cosh(\alpha t)\right]\mathrm{d}t\right\}\end{aligned}$$
met twee mogelijkheden voor
$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\right)^n \left[\frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}\cosh(\alpha t)\right].$$
Als $n$ even is krijgen we
$$\frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}} t^n \cosh(\alpha t)$$
en als $n$ oneven is krijgen we
$$\frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}} t^n \sinh(\alpha t).$$

De rest van het bewijs gaat voor beiden analoog, dus ik laat alleen degene met de cosh zien. We bekijken dus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left\{\int_0^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}} t^n \cosh(\alpha t)\mathrm{d}t\right\}.$$

Lemma 5.9 zegt nu dat we differentiëren en de oneigenlijke integraal hier mogen omwisselen. Dit geeft

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left\{\frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}} t^n \cosh(\alpha t)\right\}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\right)^{n+1}\left[\frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}\cosh(\alpha t)\right]\mathrm{d}t.$$

Dus de (IV) is ook waar voor $n+1$. Uit het principe van volledige inductie volgt nu dat de (IV) waar is voor alle $n \in \mathbb{N}$. □

Nu we dit lemma hebben, kunnen we bij Lemma 5.8 $s = -i\alpha$ invullen en differentiëren naar $\alpha$ en zo weer dichterbij de integraal van (5.1) komen.

**Lemma 5.11.** *Voor $\alpha \in [0, \frac{1}{4}\pi)$ geldt*

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}} t^{2n}\cosh(\alpha t)\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n \cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}{2^{2n-1}} - 2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\right)^{2n}\left[e^{\frac{1}{2}i\alpha}\left(\frac{1}{2}+\omega\left(e^{2i\alpha}\right)\right)\right].$$

*Bewijs.* Invullen van $s = -i\alpha$ bij Lemma 5.8 geeft

$$\int_0^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}\cos(-i\alpha t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\pi\left(e^{-\frac{1}{2}i\alpha} - 2e^{\frac{1}{2}i\alpha}\omega\left(e^{2i\alpha}\right)\right).$$

Aangezien

$$\cos(-i\alpha t) = \frac{e^{i(-i\alpha t)}+e^{-i(-i\alpha t)}}{2} = \frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2} = \cosh(\alpha t)$$

en

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}i\alpha}+e^{\frac{1}{2}i\alpha}}{2} = \cos(\frac{1}{2}\alpha) \iff e^{-\frac{1}{2}i\alpha} = 2\cos(\frac{1}{2}\alpha) - e^{\frac{1}{2}i\alpha}$$

volgt er

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}\cosh(\alpha t)\mathrm{d}t &= 2\cos(\frac{1}{2}\alpha) - e^{\frac{1}{2}i\alpha} - 2e^{\frac{1}{2}i\alpha}\omega\left(e^{2i\alpha}\right)\\ &= 2\cos(\frac{1}{2}\alpha) - 2e^{\frac{1}{2}i\alpha}\left(\frac{1}{2}+\omega\left(e^{2i\alpha}\right)\right). \qquad (5.5)\end{aligned}$$

Uit Lemma 5.10 volgt dat we links en rechts '$2n$'-keer mogen differentiëren naar $\alpha$, zo lang $\alpha < \frac{1}{4}\pi$. Dit geeft

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}} t^{2n}\cosh(\alpha t)\mathrm{d}t\\ &= (-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} 2\cos(\frac{1}{2}\alpha) - 2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\right)^{2n}\left[e^{\frac{1}{2}i\alpha}\left(\frac{1}{2}+\omega\left(e^{2i\alpha}\right)\right)\right]\\ &= \frac{(-1)^n\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}{2^{2n-1}} - 2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\right)^{2n}\left[e^{\frac{1}{2}i\alpha}\left(\frac{1}{2}+\omega\left(e^{2i\alpha}\right)\right)\right].\end{aligned}$$

□

We gaan nu laten zien dat deze meest rechterterm van Lemma 5.11 voor elke vaste $n$ naar 0 gaat als $\alpha \to \frac{1}{4}\pi$. Hiervoor hebben we 2 lemma's nodig.

**Lemma 5.12.** *Neem $c \in \mathbb{R}$ en $k \in \mathbb{N}$, dan geldt er*

$$\lim_{\delta \to 0} \delta^c \omega^{(k)} \left(\frac{1}{\delta}\right) = 0,$$

*waarbij we vanaf de positieve reële kant naar* 0 *gaan, dus* $\text{Re}(\delta) > 0$.

*Bewijs.* We schrijven $\delta$ in polaire vorm. Dus $\delta = re^{\phi i}$. Aan de voorwaarde $\text{Re}(\delta) > 0$ wordt voldaan als $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$. Er geldt nu dat $\lim \delta \to 0 = \lim r \to 0$.
$\delta = re^{\phi i}$ invullen geeft

$$\begin{aligned}\left|\delta^c \omega^{(k)} \left(\frac{1}{\delta}\right)\right| &= \left|\left(re^{\phi i}\right)^c \omega^{(k)} \left(\frac{1}{re^{\phi i}}\right)\right| = \left|\left(re^{\phi i}\right)\right|^c \left|\omega^{(k)} \left(\frac{1}{re^{\phi i}}\right)\right| \\ &= r^c \left|\omega^{(k)} \left(\frac{1}{re^{\phi i}}\right)\right|.\end{aligned}$$

Als we $r$ klein genoeg kiezen geldt

$$\text{Re}\left(\frac{1}{re^{\phi i}}\right) = \frac{\cos(\phi)}{r} \geq 1$$

en volgt via Lemma 2.4 dat

$$\left|\omega^{(k)} \left(\frac{1}{re^{\phi i}}\right)\right| \leq Ce^{-\frac{\cos(\phi)}{r}}$$

voor een $C \in \mathbb{R}$. Dit gebruiken geeft

$$r^c \left|\omega^{(k)} \left(\frac{1}{re^{\phi i}}\right)\right| \leq Cr^c e^{-\frac{\cos(\phi)}{r}}.$$

Neem nu $y = \frac{\cos(\phi)}{r}$, dan krijgen we

$$Cr^c e^{-\frac{\cos(\phi)}{r}} = C\phi^c y^{-c} e^{-y}.$$

Omdat $\cos(\phi) > 0$ geldt er

$$\lim r \to 0 = \lim y \to +\infty \text{ } (y \text{ is reëel hier}),$$

dus we krijgen

$$\lim_{\delta \to 0} |\delta^c \omega^{(k)} \left(\frac{1}{\delta}\right)| \leq \lim_{r \to 0} Cr^c e^{-\frac{\cos(\phi)}{r}} = C\phi^c \lim_{y \to \infty} y^{-c} e^{-y}.$$

Aangezien een negatieve $e$-macht sneller naar 0 gaat dan $y^{-c}$ naar $\infty$ gaat, is deze limiet 0 en zijn we klaar. $\square$

We willen straks weten wat er gebeurt als $\lim \alpha \to \frac{1}{4}\pi$ gaat bij

$$2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\right)^{2n} \left[e^{\frac{1}{2}i\alpha}\left(\frac{1}{2} + \omega\left(e^{2i\alpha}\right)\right)\right].$$

Als we $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ invullen bij $\omega\left(e^{2i\alpha}\right)$ krijgen we een probleem. Want als we $e^{2i\left(\frac{1}{4}\pi\right)} = i$ simpelweg invullen krijgen we

$$\omega(i) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi i} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\pi i}\right)^{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2}$$

en deze som convergeert niet. Met behulp van het lemma hierboven kunnen we laten zien dat deze limiet gelijk aan 0 is.

**Lemma 5.13.** *Er geldt*

$$\lim_{\alpha\to\frac{1}{4}\pi} 2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\right)^{2n}\left[e^{\frac{1}{2}i\alpha}\left(\frac{1}{2}+\omega\left(e^{2i\alpha}\right)\right)\right]=0.$$

*Bewijs.* We bekijken de term $e^{\frac{1}{2}i\alpha}\left(\frac{1}{2}+\omega\left(e^{2i\alpha}\right)\right)$ waarvan we afgeleiden gaan nemen. We laten $\alpha$ vanaf onder naar $\frac{1}{4}\pi$ lopen. Dit is hetzelfde als bekijken wat $\omega$ doet als we vanaf de positieve reële kant naar $e^{2i\left(\frac{1}{4}\pi\right)} = e^{\frac{\pi}{2}i} = i$ lopen. Neem daarom $\delta$ met $\mathrm{Re}(\delta) > 0$ en bekijk

$$\begin{aligned}\omega(i+\delta) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi(i+\delta)} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi i}e^{-n^2\pi\delta} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\pi i}\right)^{n^2} e^{-n^2\pi\delta}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n^2}e^{-n^2\pi\delta} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}e^{-n^2\pi\delta},\end{aligned}$$

waarbij de laatste stap volgt uit het feit dat $(-1)^{n^2} = (-1)^n$ aangezien $n^2$ even/oneven is als $n$ respectievelijk even/oneven is. Deze laatste term telt alle termen met even '$n$' positief, en alle termen met oneven '$n$' negatief. Dit is hetzelfde als alle termen met even $n$ twee keer tellen, en vervolgens alle termen (even én oneven) ervanaf te trekken:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n^2\pi\delta} &= 2\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(2n)^2\pi\delta}}_{\text{termen met even } n} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi\delta}}_{\text{alle termen}}\\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-4n^2\pi\delta} - \omega(\delta) = 2\omega(4\delta)-\omega(\delta).\end{aligned}$$

Dan gaan we nu Lemma 2.4 gebruiken. Via dit lemma vinden we als we voor $x^{-1}$ respectievelijk $4\delta$ en $\delta$ invullen dat

$$\begin{aligned}2\omega(4\delta)-\omega(\delta) &= 2\left((4\delta)^{-\frac{1}{2}}\omega(\frac{1}{4\delta}) + \frac{1}{2}(4\delta)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right) - \left(\delta^{-\frac{1}{2}}\omega(\frac{1}{\delta}) + \frac{1}{2}\delta^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{2}{\sqrt{4\delta}}\,\omega\left(\frac{1}{4\delta}\right) + \frac{1}{\sqrt{4\delta}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{\delta}}\,\omega\left(\frac{1}{\delta}\right) - \frac{1}{2\sqrt{\delta}} + \frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta}}\,\omega\left(\frac{1}{4\delta}\right) + \frac{1}{2\sqrt{\delta}} - \frac{1}{\sqrt{\delta}}\,\omega\left(\frac{1}{\delta}\right) - \frac{1}{2\sqrt{\delta}} - \frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta}}\,\omega\left(\frac{1}{4\delta}\right) - \frac{1}{\sqrt{\delta}}\,\omega\left(\frac{1}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Dus

$$e^{\frac{1}{2}i\alpha}\left(\frac{1}{2}+\omega\left(i+\delta\right)\right) = e^{\frac{1}{2}i\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\,\omega\left(\frac{1}{4\delta}\right) - \frac{1}{\sqrt{\delta}}\,\omega\left(\frac{1}{\delta}\right)\right).$$

De '$2n$'-de afgeleide naar $\alpha$ hiervan (herinner dat $\delta = e^{2i\alpha} - i$) zal altijd bestaan uit termen van de vorm[2]

$$Ce^{ib\alpha}\delta^c\omega^{(k)}\left(\frac{1}{\delta}\right),$$

[2]Of $\frac{1}{4\delta}$ i.p.v. $\frac{1}{\delta}$, maar dat maakt voor het naar 0 gaan niet uit.

waarbij $C \in \mathbb{C}$, $b, c \in \mathbb{R}$ constanten zijn en $0 \leq k \leq 2n$. Aangezien $Ce^{ib\alpha}$ goed gedefinieerd is voor $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, volgt uit Lemma 5.12 dat

$$\lim_{\delta \to 0} Ce^{ib\alpha}\delta^c \omega^{(k)}\left(\frac{1}{\delta}\right) = 0$$

en dus dat

$$\lim_{\delta \to 0} 2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\right)^{2n}\left[e^{\frac{1}{2}i\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\,\omega\left(\frac{1}{4\delta}\right) - \frac{1}{\sqrt{\delta}}\,\omega\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)\right] = 0. \qquad \square$$

Nu kunnen we de uitdrukking afleiden die we nodig hebben voor het bewijs van de Stelling van Hardy.

**Gevolg 5.14.** *Er geldt*

$$\lim_{\alpha \to \frac{1}{4}\pi} \int_0^\infty \frac{Z(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} t^{2n} \cosh(\alpha t)\ \mathrm{d}t = \frac{(-1)^n \pi \cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)}{2^{2n}}.$$

*Bewijs.* Lemma 5.11 combineren met Lemma 5.13 geeft

$$\begin{aligned} &\lim_{\alpha \to \frac{1}{4}\pi} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{Z(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} t^{2n} \cosh(\alpha t)\ \mathrm{d}t \\ &= \lim_{\alpha \to \frac{1}{4}\pi} \frac{(-1)^n \cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}{2^{2n-1}} - \lim_{\alpha \to \frac{1}{4}\pi} 2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\right)^{2n} e^{\frac{1}{2}i\alpha}\left(\frac{1}{2} + \omega\left(e^{2i\alpha}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n \cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)}{2^{2n-1}} - 0. \end{aligned}$$

Beide kanten nu met $\frac{\pi}{2}$ vermenigvuldigen geeft het gevraagde. $\square$

## 5.4. **De Stelling van Hardy.**

Nu we Gevolg 5.14 hebben kunnen we de Stelling van Hardy gaan bewijzen.

**Stelling van Hardy.** *$\zeta$ heeft oneindig veel nulpunten op de kritieke lijn gegeven door $Re(s) = \frac{1}{2}$.*

*Bewijs.* We moeten laten zien dat $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ oneindig veel reële nulpunten heeft. Uit Lemma 5.2 volgt dat dit equivalent is aan bewijzen dat $Z$ oneindig veel reële nulpunten heeft.

Aangezien $Z$ even is (Lemma 5.2), volgt dat op de kritieke lijn met positief imiginair deel evenveel nulpunten liggen als op het deel met een negatief imaginair deel. Dus het is voldoende alleen te kijken naar $Z(t)$ met $t > 0$.

Omdat $\xi$ analytisch op heel $\mathbb{C}$ (Lemma 4.5), is $Z$ zeker continu op $\mathbb{R}$. Dus als $Z$ ergens van teken wisselt (positief/negatief), moet $Z$ daar een nulpunt hebben. Dit volgt uit de tussenwaardestelling. Dus als we laten zien dat $Z$ oneindig vaak van teken wisselt, dan volgt dat $Z$ ook oneindig veel nulpunten moet hebben.

Via Gevolg 5.14 weten we dat

$$\lim_{\alpha\to\frac{1}{4}\pi}\int_0^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}t^{2n}\cosh(\alpha t)\ \mathrm{d}t = \frac{(-1)^n\pi\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)}{2^{2n}}\ . \tag{5.6}$$

Neem nu aan dat $Z(t)$ een eindig aantal keer van teken wisselt. Dan moet er dus een $T>0$ zijn zo dat als $t>T$ de functie $Z(t)$ maar één teken aanneemt. We mogen aannemen dat dit teken positief is (als dit negatief is kunnen we namelijk hetzelfde doen voor $-Z(t)$). Aangezien de integraal aan de linkerkant van (5.6) convergeert, convergeert dezelfde integraal maar dan van $T$ tot $\infty$ ook.

$$0<\lim_{\alpha\to\frac{1}{4}\pi}\int_T^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}t^{2n}\cosh(\alpha t)\ \mathrm{d}t = L.$$

De integraal is positief aangezien $Z(t)>0$, $\frac{1}{t^2+\frac{1}{4}}>0$ en $\cosh\left(\frac{1}{4}\pi t\right)>0$ als $t>T$. Uit de vergelijking hierboven volgt dat voor alle $T'>T$ er geldt

$$\int_T^{T'} \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}t^{2n}\cosh(\alpha t)\ \mathrm{d}t \leq L.$$

Dit geldt voor alle $0\leq\alpha<\frac{1}{4}\pi$ aangezien $\cosh(\alpha t)$ een stijgende functie van $\alpha$ is als $t$ groter dan 0 is.[3]. Het is nu geen oneigenlijke integraal meer, dus we kunnen $\alpha=\frac{1}{4}\pi$ invullen. Voor alle $T'>T$ geldt dus

$$\int_T^{T'} \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}t^{2n}\cosh(\frac{1}{4}\pi t)\ \mathrm{d}t \leq L.$$

Hieruit volgt dat de integraal $$\int_T^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}t^{2n}\cosh(\frac{1}{4}\pi t)\ \mathrm{d}t$$

convergeert en dat de integraal van (5.6) dus uniform convergent[4] is voor $\alpha\in[0,\frac{1}{4}\pi]$. Dus we mogen de limiet en integraal van (5.6) omwisselen.

$$\int_0^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}t^{2n}\cosh\left(\frac{1}{4}\pi t\right)\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n\pi\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)}{2^{2n}}$$

voor elke $n\in\mathbb{N}$.
Maar stel dat we $n$ oneven nemen, dan geldt

$$\int_0^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}t^{2n}\cosh\left(\frac{1}{4}\pi t\right)\mathrm{d}t = \frac{-\pi\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)}{2^{2n}}<0.$$

Deze integraal opsplitsen geeft

$$\begin{aligned}&\int_0^T \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}t^{2n}\cosh\left(\frac{1}{4}\pi t\right)\mathrm{d}t+\int_T^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}t^{2n}\cosh\left(\frac{1}{4}\pi t\right)\mathrm{d}t<0\\ \Longleftrightarrow &\int_T^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}t^{2n}\cosh\left(\frac{1}{4}\pi t\right)\mathrm{d}t<-\int_0^T \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}t^{2n}\cosh\left(\frac{1}{4}\pi t\right)\mathrm{d}t\ .\end{aligned}$$

---

[3] $\int_T^{T'} \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}t^{2n}\cosh(\alpha t)\ \mathrm{d}t>L$ kan dus niet gebeuren als $\alpha$ kleiner is dan $\frac{1}{4}\pi$.

[4] Uniform convergent in de zin van $f_n(\alpha)=\int_0^n \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}t^{2n}\cosh(\alpha t)\ \mathrm{d}t$.

Aangezien $-T\frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}\cosh\left(\frac{1}{4}\pi t\right)$ continu is op het gesloten en begrensde interval $[0,T]$, neemt deze een maximum $M'$ aan. Neem $M = \max\{M', 1\}$, dan geldt op $[0,T]$ dat

$$-\frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}\cosh\left(\frac{1}{4}\pi t\right) < \frac{M}{T},$$

waarbij $M \geq 1$ onafhankelijk is van $n$. We weten dat als $f(x) < C$ en $g(x) > 0$ voor $x \in [a,b]$ er geldt $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x < C\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. Dit twee keer gebruiken geeft

$$-\int_0^T \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}t^{2n}\cosh\left(\frac{1}{4}\pi t\right)\mathrm{d}t < \frac{M}{T}\int_0^T t^{2n}\mathrm{d}t \underbrace{\leq}_{(*)} \frac{M}{T}\int_0^T T^{2n}\mathrm{d}t = MT^{2n},$$

waarbij (*) volgt uit het feit dat $t^{2n}$ een stijgende functie is op $[0,T]$ als $n > 0$. We zien dus dat

$$\int_T^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}t^{2n}\cosh\left(\frac{1}{4}\pi t\right)\mathrm{d}t < MT^{2n} \tag{5.7}$$

Maar er geldt omdat $Z(t) > 0$, $\frac{1}{t^2+\frac{1}{4}} > 0$ en $\cosh\left(\frac{1}{4}\pi t\right) > 0$ als $t > T$, dat er een minimum $m > 0$ van $\frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}\cosh\left(\frac{1}{4}\pi t\right)$ is op het gesloten en begrensde interval $[2T, 2T+1]$. Een $m$ die ook onafhankelijk van $n$ is. Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned}\int_T^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}t^{2n}\cosh\left(\frac{1}{4}\pi t\right)\mathrm{d}t &\underbrace{>}_{(*)} \int_{2T}^{2T+1} \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}t^{2n}\cosh\left(\frac{1}{4}\pi t\right)\mathrm{d}t \\ &> m\int_{2T}^{2T+1} t^{2n}\mathrm{d}t \\ &\underbrace{>}_{(**)} m\int_{2T}^{2T+1} (2T)^{2n}\,\mathrm{d}t \\ &= mT^{2n},\end{aligned}$$

waarbij (*) volgt uit het feit dat $\frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}t^{2n}\cosh\left(\frac{1}{4}\pi t\right) > 0$ en (**) weer volgt uit het feit dat $t^{2n}$ een stijgende functie is op $[2T, 2T+1]$ als $n > 0$. Deze ongelijkheid verenigen met ongelijkheid (5.7) geeft

$$m\,(2T)^{2n} < \int_T^\infty \frac{Z(t)}{t^2+\frac{1}{4}}t^{2n}\cosh\left(\frac{1}{4}\pi t\right)\mathrm{d}t < MT^{2n}$$

en dit leidt tot

$$m2^{2n} < M.$$

Maar merk op dat $m$ en $M$ beiden groter dan 0 en onafhankelijk van $n$ zijn. Dus als we $n$ groot genoeg gekiezen klopt deze ongelijkheid niet meer. Een tegenspraak. We concluderen dat $Z(t)$ een oneindig aantal keer van teken wisselt en dus dat $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ oneindig veel reële nulpunten heeft.

□

## Nawoord

In dit verslag zijn in de hoofdstukken 1 tot en met 3 een aantal basisaspecten van de $\zeta$-functie behandeld. Hierna zijn er twee resultaten met betrekking tot de nulpunten bewezen. Wat opvalt is dat als het over de $\zeta$-functie gaat, het al snel erg technisch wordt. Het was, vooral bij de laatste twee hoofdstukken, veel integralen afschatten, uitwerken en limieten omwisselen. Veel bewijzen van mooie resultaten van de $\zeta$-functie zijn vaak nog veel technischer. Een erg mooi resultaat komt bijvoorbeeld van Levinson. Hij heeft bewezen dat tenminste $\frac{1}{3}$-deel van alle niet-triviale nulpunten op de kritieke lijn moeten liggen. Dit resultaat van de $\zeta$-functie wordt relatief vaak genoemd, maar een bewijs wordt niet vaak gegeven. Niet omdat het bewijs zo enorm lastig te begrijpen is, maar omdat het zo technisch is dat niet veel wiskundigen zich eraan willen wagen. Een wiskundige die zich er wel aan wilde wagen was Conrey, deze heeft dit resultaat van Levinson verbeterd en bewezen dat minstens $\frac{2}{5}$-deel van alle niet-triviale nulpunten op de kritieke lijn ligt.

Hoewel de bewijzen van resultaten van de $\zeta$-functie dus vaak heel technisch zijn, zijn er toch geniale wiskundigen die deze resultaten van te voren al kunnen 'zien'. Riemann zag bijvoorbeeld zonder een bewijs ervan te geven dat de orde van argumentsverandering van $\zeta$ op de kritieke strip $\log(z)$ is. Weer een andere bijzondere wiskundige die met de $\zeta$-functie heeft gewerkt is Ramanujan. Deze Indische wiskundige heeft schriften vol geschreven met, voor het grootste deel, kloppende formules, zonder ergens een bewijs van te geven. Voor het begrijpen en uitwerken van één van zijn formules had ik een paar weken en 11 kantjes nodig.

Bijzonder vind ik dat Ramanujan zei dat hij deze resultaten via God kreeg. Dit voegt iets moois toe aan het idee dat wiskunde een mysterieuze wereld vol structuur is, een wereld waar wij als wiskundigen steeds dieper induiken en een wereld die elke keer als we er dieper induiken groter lijkt te worden.

## Bijlage A. De Γ-functie

De Γ-functie is een complexe functie met definitie

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x, \ \mathrm{Re}(s) > 0.$$

De Γ-functie heeft de volgende eigenschappen [2].

(i) $\Gamma$ heeft een analytische voortzetting naar $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}_0\}$. Deze voortzetting wordt bepaald door de functionaalvergelijking

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s}\Gamma(s+1).$$

(ii) $\Gamma$ heeft simpele polen in de punten $s = -k$, waarbij $k \in \mathbb{N}_0$. Het residu in $-k$ wordt gegeven door

$$\mathrm{Res}\,(\Gamma, -k) = \frac{(-1)^k}{k!}.$$

(iii) $\Gamma(x) \in \mathbb{R}$ als $x \in \mathbb{R}\backslash\{-k, k \in \mathbb{N}_0\}$ en als $x > 0$, dan is $\Gamma(x)$ positief.

(iv) $\Gamma$ heeft geen nulpunten.

(v) De functie $\log\Gamma$ is gedefinieerd als een specifieke primitieve van $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$, namelijk degene die overeenkomt met $\ln\Gamma\,(x)$ voor positieve, reële $x$. Deze functie is analytisch waar $\Gamma$ geen polen heeft.
Als $s \in \mathbb{C}$ met $\mathrm{Re}(s) > 0$ en $\mathrm{Im}(s) \to \infty$ heeft $\log\Gamma(s)$, via de formule van Stirling, het volgende asymptotische gedrag:

$$\log\Gamma(s) = (\mathrm{Re}(s) + i\,\mathrm{Im}(s) - \frac{1}{2})\log(i\,\mathrm{Im}(s)) - i\,\mathrm{Im}(s) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mathrm{Im}(s)}\right).$$

Hieruit volgt ook dat als $\mathrm{Im}(s) \to \infty$, er geldt

$$\Gamma(s) = |\,\mathrm{Im}(s)^{\mathrm{Re}(s)|+i\,\mathrm{Im}(s)-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\pi|\,\mathrm{Im}(s)|}e^{i(\frac{1}{2}\pi(\mathrm{Re}(s)-\frac{1}{2})-\mathrm{Im}(s))}\sqrt{2\pi}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mathrm{Im}(s)}\right)\right).$$

(vi) De Γ-functie heeft de volgende waarden:

- $\Gamma(k) = (k-1)!$ als $k \in \mathbb{N}$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

## Bijlage B. Rekenregels geconjugeerden

Voor elk paar complexe getallen $a, b$ geldt het volgende:
(1) $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$
(2) $\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$
(3) $\overline{a^b} = a^{\overline{b}}$ als $a \in \mathbb{R}_{>0}$
(4) $\overline{\mathrm{Re}(a)} = \mathrm{Re}(a)$
(5) $\overline{\mathrm{Im}(a)} = -\,\mathrm{Im}(a)$
(6) $a + \overline{a} = 2\,\mathrm{Re}(a)$
(7) $a - \overline{a} = 2\,\mathrm{Im}(a)$
(8) $a \in \mathbb{R} \iff a = \overline{a}$
(9) $a \in i\mathbb{R} \iff a = -\overline{a}$

## Bijlage C. Bewijs Lemma 5.6

*Bewijs Lemma 5.6.* We gaan de Residustelling van Cauchy toepassen om de contour van de integraal te 'verleggen' naar rechts. Deze stelling zegt dat de contourintegraal van een analytische functie gelijk is aan de som van de residuen binen deze contour vermenigvuldigd met een factor $2\pi i$. We kiezen de kromme $\beta$ die in een rechthoek loopt van $\frac{1}{2} - iR \to \frac{1}{2} + iR \to 2 + iR \to 2 - iR \to \frac{1}{2} - iR$. Als we dan $R \to \infty$ laten gaan hebben we onze integraal van hierboven, en de integraal die iets naar rechts is verlegd waar we de somrepresentatie van $\zeta$ wel kunnen invullen en nog twee integralen op de horizontale lijnen welke naar 0 zullen gaan zoals we straks zullen zien.
Noem $f(z) = \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)y^z$, dan zegt de residustelling dat

$$\int_\beta f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_j \mathrm{Res}(f; z_j)\chi(\beta; z_j),$$

waarbij $z_j$ de polen binnen $\beta$ zijn en $\chi(\beta; z_j)$ de orde van de pool in $z_j$ vermenigvuldigd met hoe vaak er tegen de klok in om $z_j$ heen gegaan wordt door $\beta$. Alleen $\zeta$ heeft een pool in dit gebied, namelijk in $z = 1$, met residu 1 (Gevolg 3.12). Dit is een simpele pool en er wordt één keer met de klok mee omheen gegaan, dus

$$\chi(\beta; 1) = -1.$$

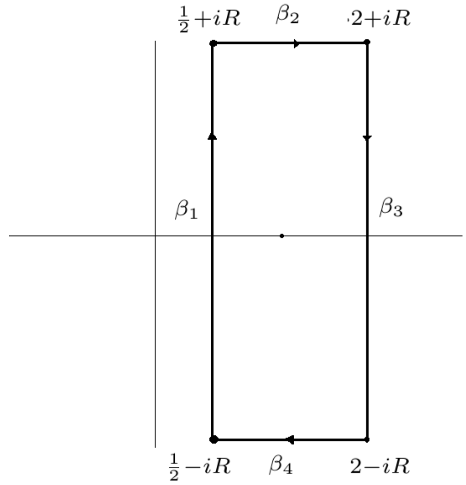
Aangezien we weten uit bijlage A dat $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, heeft deze pool een residu met waarde

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1}(z-1)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)y^z &= \pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) y \lim_{z\to 1}(z-1)\zeta(z)\\ &= y\lim_{z\to 1}(z-1)\zeta(z)\\ &= y.\end{aligned}$$

Dus we vinden

$$\sum_j \mathrm{Res}(f; z_j)\chi(\beta; z_j) = \mathrm{Res}(f; 1)\chi(\beta; 1) = -y.$$

We delen nu $\beta$ op in $\beta_1$ t/m $\beta_4$ op de volgende manier:




FIGUUR 9. De kromme $\beta$ opgedeeld.

Er geldt dus

$$\int_{\beta_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\beta_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\beta_3} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\beta_4} f(z)\mathrm{d}z = -2\pi i y. \tag{C.1}$$

We gaan laten zien dat

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\beta_2} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty} \int_{\frac{1}{2}+iR}^{2+iR} f(z)\mathrm{d}z = 0 \text{ en}$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\beta_4} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty} \int_{2-iR}^{\frac{1}{2}-iR} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

Als we laten zien dat $f(\mathrm{Re}(z) \pm iR)$ sneller dan $\mathcal{O}\left(R^{-1}\right)$ naar 0 gaat als $R \to \infty$ dan zijn we klaar. Aangezien $\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq 2$ en $|\mathrm{Im}(z)| = R \to \infty$ volgt uit Lemma 5.3 dat

$$f(z) = \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) y^z = \mathcal{O}\left(R^A e^{-\frac{\pi}{4}R} y^z\right).$$

We moeten dan nu nog $y^z$ afschatten.

$$|y^z| = |e^{sz}| = e^{\mathrm{Re}(sz)} = e^{\mathrm{Re(s)}\,\mathrm{Re(z)}} e^{-\mathrm{Im}(s)\,\mathrm{Im}(z)}.$$

Er geldt dat $s$ vast is en $\mathrm{Re}(z) \leq 2$, dus $e^{\mathrm{Re(s)}\,\mathrm{Re(z)}}$ is begrensd. Aangezien

$$-\frac{1}{4}\pi < \mathrm{Im}(s) < \frac{1}{4}\pi$$

volgt dat

$$B = -\mathrm{Im}(s)\,\mathrm{Im}(z) < \frac{\pi}{4}R.$$

Dus

$$y^z = \mathcal{O}\left(e^B\right), \text{ als } R \to \infty. \tag{C.2}$$

Hieruit volgt dat

$$f(z) = \mathcal{O}\left(R^A e^{-\frac{\pi}{4}R} y^z\right) = \mathcal{O}\left(R^A e^{-\left(\frac{\pi}{4}R - B\right)}\right), \text{ als } R \to \infty.$$

Aangezien $B < \frac{\pi}{4}R$ volgt dat $f(z)$ exponentieel naar 0 gaat als $R \to \infty$. Dus inderdaad geldt

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\beta_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\beta_4} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Als we bij (C.1) $R \to \infty$ laten gaan vinden we

$$\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} f(z)\mathrm{d}z + \int_{2+i\infty}^{2-i\infty} f(z)\mathrm{d}z = -2\pi i y$$

$$\iff -\frac{1}{4i\sqrt{y}}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\pi\sqrt{y} - \frac{1}{4i\sqrt{y}}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} f(z)\mathrm{d}z.$$

□

## Referenties

[1] Abramowitz, M. & Stegun, I.A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions*, United Stated Department of Commerce, 10th edition.

[2] Andrews, G.E., Askey, R. & Roy, R. (1999). *Special Fuctions*, Cambridge University Press.

[3] Conrey, J.B. (1989). More than two fifths of the zeros of the Riemann Zeta-function are on the critical line. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 399, 1-26.

[4] Freitag, E.& Busam, R. (2009). *Complex Analysis*, Berlijn: Springer, 2nd edition.

[5] Iwaniec, H. (2010). Lectures on the Riemann Zeta Function. *University Lecture Series* (Vol. 62), American Mathematical Society.

[6] Menici, L. (2012). *Zeros of the Riemann Zeta-function on the critical line*, Università Degli Studi Roma Tre.

[7] Patterson, S.J. (1988). *An introduction to the theory of the Riemann Zeta-Function*, Cambridge University Press.

[8] Ramanujan, S. (1915). New expressions for Riemann's functions $\xi(s)$ and $\Xi(t)$. *Quart. J. of Math.*, 46, pp253-61.

[9] Riemann, B. (1859). Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. *Monatsberichte der Berliner Akademie*, Nov.

[10] Stein, E.M. & Shakarchi, R. (2003). Applications of Theta Functions. *Complex Analysis* (pp 283-99). Princeton University Press.

[11] Titchmarsh, E.C. (1986). *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Oxford University Press, 2nd edition.