

# DE WORTELSYSTEMEN IN E8

DENNIS POUW (4470168)

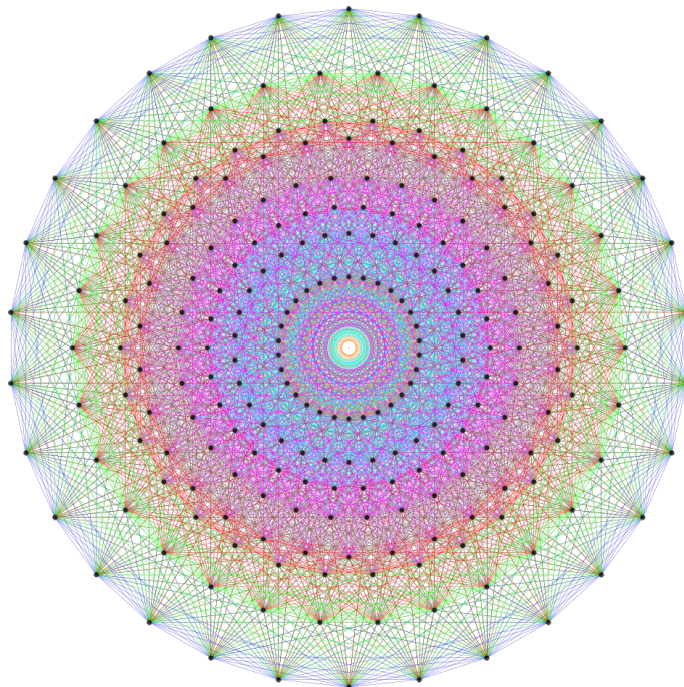
Technische Universiteit Delft  
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica  
Delft Institute of Applied Mathematics

## Begeleiders:

Dr. P.M. Visser  
Dr. F.J. van de Bult

## Overige commissieleden:

Dr. K.P. Hart  
Dr. B. van den Dries



Juli, 2018 Delft

## INHOUDSOPGAVE

1. Introductie	3
2. Uitleg symbolen	4
3. Wortelsystemen	4
3.1. Voorbereiding	4
3.2. Definitie wortelsysteem	4
3.3. Eigenschap van wortels	5
4. Basissen van wortelsystemen	7
4.1. Definitie	7
4.2. Ordening en hoogste wortel	7
4.3. Eigenschappen positieve wortels	9
4.4. Eigenschappen positieve wortels in irreducibel wortelsysteem	10
5. Weyl-groep en alle wortels verkrijgen met basis	11
5.1. Uitleg algoritme	11
6. Visualisatie wortelsystemen	12
6.1. 1D	12
6.2. 2D	12
6.3. 3D	13
7. Hoogste wortel vinden in een wortelsysteem	14
8. Classificatie aan de hand van Dynkin diagrammen	14
9. Deelwortelsystemen	16
10. Basis verkrijgen door vervanging met hoogste wortel	18
10.1. Deelwortelsystemen van dezelfde rang	19
11. Conclusie	22
12. Bronnen	23
13. Appendix A	23

## 1. INTRODUCTIE

Een wortelsysteem is een verzameling vectoren, die wortels worden genoemd, met mooie geometrische eigenschappen. Wortelsystemen zijn onderzocht door Wilhelm Killing rond 1889 en de theorie erover is later nog uitgebreid door Élie Cartan. Wortelsystemen zijn handige wiskundige objecten die voortkomen uit groepentheorie, maar ze hebben ook concrete toepassingen: namelijk contactgetallen en bolstapelings.

De definitie van het contactgetal is de volgende: Neem een eenheidshyperbol van  $n$  dimensies in een ruimte van dimensie  $n$ . Het contactgetal is het maximale aantal niet overlappende eenheidshyperbollen die je tegen de centrale hyperbol aan kan leggen.

De bolmiddenpunten van zo'n configuratie corresponderen soms met de vectoren uit een wortelsysteem. In twee dimensies liggen de hyperbollen (cirkels) op een zeshoek, dus het contactgetal is 6. Het bijbehorende wortelsysteem wordt  $A_2$  genoemd. Net zo zijn de configuraties in dimensies 3, 4 en 8 de wortelsystemen  $A_3$ ,  $D_4$  en  $E_8$ . Deze hebben respectievelijk ordes 12, 24 en 240.

Een ander probleem waarvoor wortelsystemen gebruikt kunnen worden is bolstapelings. De vraag is: hoe kan je hyperbollen in een ruimte zo dicht mogelijk op elkaar stapelen, zodat er zo min mogelijk ruimte tussen de hyperbollen in zit. De stapelings vind je dan door het wortelsysteem in een rooster voor te zetten, dus ze geven een crystalstructuur. Deze zogenaamde wortelroosters geven waarschijnlijk de dichtste hyperbolstapelings, maar geven in ieder geval een goede bovengrens voor hoe dicht hyperbollen in  $n$  dimensies bij elkaar kunnen zitten. Het is al bewezen dat voor dimensies 1, 2, 4 en 8 een wortelsysteem de dichtste bolstapeling geeft, waarbij het feit in dimensie 8 pas net bewezen is.

Wortelsystemen zijn belangrijk in groepentheorie aangezien ze de enkelvoudige Lie Algebras en enkelvoudige Lie groepen karakteriseren. Een bekend feit over wortelsystemen in de algebra is het volgende: Als  $\Phi'$  een deelwortelsysteem in een wortelsysteem  $\Phi$  is, dan is de bijbehorende Lie groep ook een ondergroep van de Lie groep in  $\Phi$ . Als je meer over Lie groepen wil weten, dan kan je er meer over lezen in het boek *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory* van Humphreys (1972).

$E_8$  is het meest interessante wortelsysteem, want dit is het grootste exceptionele enkelvoudige systeem.

In dit verslag zal  $E_8$  bestudeerd worden. Dit zal worden gedaan door naar deelwortelsystemen te kijken. Zo wordt een beeld verkregen van de structuur van  $E_8$ . Hiermee zullen we  $E_8$  ontrafelen.

Er zal in dit verslag als eerste een basis over wortelsystemen worden gelegd, waarna er manieren worden besproken om wortelsystemen te maken en te visualiseren. Daarna zal worden besproken hoe er deelwortelsystemen in wortelsystemen gevonden kunnen worden. Uiteindelijk zal dit toegepast worden op  $E_8$ .

## 2. UITLEG SYMBOLEN

Om met wortelsystemen te werken, is het nodig om de volgende begrippen en symbolen te weten:

begrippen/symbolen	uitleg
$\mathbb{Z}$	De verzameling bestaande uit alle gehele getallen
$\Phi$	Notatie voor een algemeen wortelsysteem
$\sigma_\alpha(\beta)$	Spiegeling van de vector $\beta$ in het hypervlak door de oorsprong dat loodrecht op $\alpha$ staat
$\Delta$	Een basis van een wortelsysteem
$ht(\alpha)$	De hoogte van een wortel $\alpha$

## 3. WORTELSYSTEMEN

## 3.1. Voorbereiding.

Om een wortelsysteem definiëren, is het handig om het volgende object te gebruiken: de lineaire vorm  $\langle \beta, \alpha \rangle$ . Als het normale inproduct tussen twee vectoren  $\alpha$  en  $\beta$  wordt geschreven als  $(\beta, \alpha)$ , dan wordt het symbool  $\langle \beta, \alpha \rangle$  als volgt gedefinieerd:

$$\langle \beta, \alpha \rangle := 2 \cdot \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}.$$

Dit is lineair in het eerste variabele, maar niet in de tweede variabele.

Het verband tussen deze lineaire vorm en spiegelingen is als volgt: Het spiegelen van een vector  $\beta$  in het hypervlak door de oorsprong dat loodrecht staat op  $\alpha$  kan als volgt worden uitgerekend:

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \cdot \alpha.$$

## 3.2. Definitie wortelsysteem.

Nu kan een wortelsysteem gedefiniëerd worden.

**Definitie 3.1** (wortelsysteem). Een deelverzameling  $\Phi$  in een vectorruimte  $E$  wordt een wortelsysteem genoemd als  $\Phi$  de volgende eigenschappen heeft:

- (R1)  $\Phi$  is van eindige grootte, spant heel  $E$  op en bevat 0 niet,
- (R2) Als  $\alpha \in \Phi$ , dan zijn  $\alpha$  en  $-\alpha$  de enige veelvouden van  $\alpha$  in  $\Phi$ ,
- (R3) Als  $\alpha \in \Phi$ , dan is  $\Phi$  onder de reflectie  $\sigma_\alpha$  invariant,
- (R4) Als  $\alpha, \beta \in \Phi$ , dan  $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ .

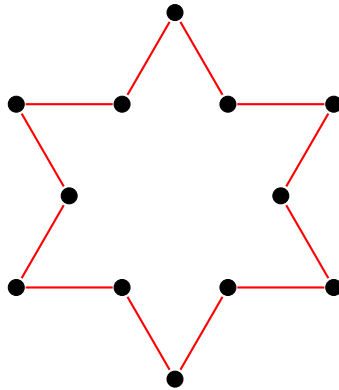
Om een beeld te geven wat **R1** t/m **R4** omschrijven, zal het wortelsysteem  $G_2$  worden besproken. Deze ziet er uit zoals in figuur 1.

In figuur 1 zijn alle punten wortels, het midden van het plaatje is het punt 0 en de rode lijnen zijn er om de vorm van het wortelsysteem mooi weer te geven.

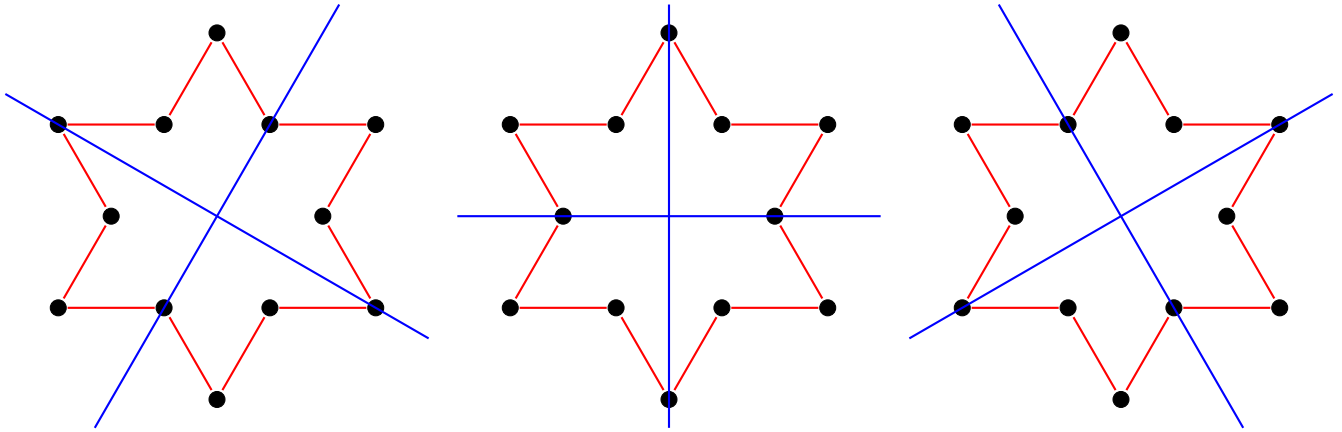
**R1** zegt dat het wortelsysteem een eindig aantal wortels heeft en dat 0 niet als element gerekend wordt.

**R2** zegt dat als je een lijn door een wortel  $\alpha$  en 0 tekent, dat de enige punten op die lijn  $\alpha$  en  $-\alpha$  zijn. Dus in figuur 2 moet op iedere blauwe lijn precies twee punten staan met dezelfde afstand tot het middelpunt.

**R3** zegt dat als je een hypervlak loodrecht op een wortel door 0 tekent, dat iedere wortel als spiegelbeeld een andere wortel heeft. Dus in figuur 2 moet iedere blauwe lijn een spiegel-as zijn van het wortelsysteem.

FIGUUR 1.  $G_2$ 

FIGUUR 2. blauwe lijnen door wortels en het punt 0



### 3.3. Eigenschap van wortels.

Door axioma **R4** te gebruiken, kan er worden bepaald welke hoeken er mogelijk zijn tussen twee wortels in een wortelsysteem. Als  $\alpha$  en  $\beta$  wortels zijn en  $\theta$  de hoek tussen deze wortels, dan geldt:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = \frac{2 \|\alpha\| \|\beta\| \cos(\theta)}{\|\beta\| \|\beta\| \cos(0)} = \frac{2 \|\alpha\|}{\|\beta\|} \cos(\theta) \in \mathbb{Z}.$$

Op dezelfde manier kan je  $\langle \beta, \alpha \rangle$  uitschrijven. Als je  $\langle \alpha, \beta \rangle$  met  $\langle \beta, \alpha \rangle$  vermenigvuldigd, dan moet dat gelijk zijn aan  $4 \cos(\theta)^2 = (2 \cos(\theta))^2$  en moet het product een kwadratisch positief geheel getal zijn en tussen 0 en 4 in zitten, omdat  $\cos(\theta)^2 \in [0, 1]$ .

Dus de enige opties over voor  $2 \cos(\theta)$  zijn  $0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$  en  $\sqrt{4} = 2$ . Dit geeft als oplossingen de bekende hoeken van de sinus en de cosinus:  $\theta = 0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$  en verder.

Door hieruit terug te werken, vinden we de enige oplossingen met  $\alpha \neq \pm\beta$  en  $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$ . Deze oplossingen staan in tabel 1.

**Tabel 1**

$\langle \alpha, \beta \rangle$	$\langle \beta, \alpha \rangle$	$\theta$	$\ \beta\ ^2 / \ \alpha\ ^2$
0	0	$\pi/2$	onbepaald
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

TABEL 1. Alle mogelijkheden van oplossingen voor de hoek  $\theta$  tussen wortels  $\alpha$  en  $\beta$  met  $\alpha \neq \pm\beta$  en  $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$  met bijbehorende waarden van  $\langle \alpha, \beta \rangle$ ,  $\langle \beta, \alpha \rangle$  en de ratio tussen de lengtes van de wortels in het kwadraat.

Met tabel 1 kan je het volgende lemma makkelijk bewijzen.

**Lemma 3.1.** *Laat  $\alpha, \beta$  wortels zijn waarvoor geldt dat  $\beta$  niet in het verlengde van  $\alpha$  ligt. Als  $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$ , dan is  $\alpha - \beta$  een wortel. Als  $\langle \alpha, \beta \rangle < 0$ , dan is  $\alpha + \beta$  een wortel.*

*Bewijs.* De tweede uitspraak volgt uit de eerste uitspraak (door  $-\beta$  te gebruiken i.p.v.  $\beta$ ). Omdat  $\langle \alpha, \beta \rangle$  positief is dan en slechts dan als  $\langle \alpha, \beta \rangle$  positief is, volgt uit tabel 1 dat moet gelden dat  $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$  of  $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$ .

Als  $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$ , dan  $\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - \beta \in \Phi(\mathbf{R3})$ ; Op dezelfde manier, als  $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$ , dan  $\beta - \alpha \in \Phi$ , waardoor  $\sigma_{\beta-\alpha}(\beta - \alpha) = \alpha - \beta \in \Phi$ .  $\square$

Dit bewijs komt uit Humphreys (1972).

De contrapositie van dit lemma is ook handig om te hebben voor bepaalde bewijzen in dit verslag:

**Lemma 3.2.** *Laat  $\alpha, \beta$  zijn waarvoor geldt dat  $\beta$  niet in het verlengde van  $\alpha$  ligt. Als  $\alpha - \beta$  geen wortel is, dan geldt dat  $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ . Als  $\alpha + \beta$  geen wortel is, dan geldt dat  $\langle \alpha, \beta \rangle \geq 0$ .*

4. BASISSEN VAN WORTELSYSTEMEN

4.1. Definitie.

**Definitie 4.1** (basis). Een deelverzameling  $\Delta$  van  $\Phi$  wordt een basis van  $\Phi$  genoemd als:

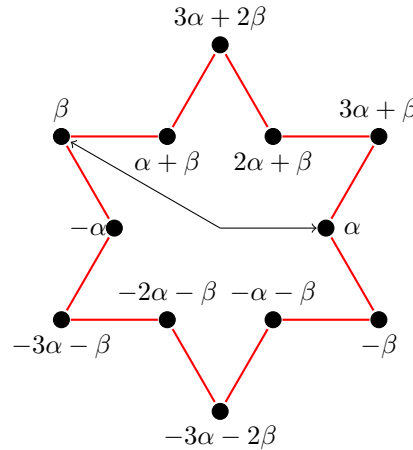
(B1)  $\Delta$  is een basis van  $E$ ,

(B2) Elke wortel  $\beta$  in  $\Phi$  kan geschreven worden als  $\beta = \sum k_\alpha \alpha$  ( $\alpha \in \Delta$ ) waarbij alle  $k_\alpha$  allemaal gehele niet negatieve getallen óf allemaal gehele niet positieve getallen zijn.

Als voor  $\beta = \sum k_\alpha \alpha$  ( $\alpha \in \Delta$ ) geldt dat alle  $k_\alpha$  positief of 0 zijn, dan wordt  $\beta$  een positieve wortel genoemd en als alle  $k_\alpha$  negatief of 0 zijn, dan wordt  $\beta$  een negatieve wortel genoemd.

Laten we  $G_2$  weer als voorbeeld nemen. Als we de wortels  $\alpha$  en  $\beta$  nemen zoals in figuur 3, dan kan je alle andere wortels op de manier schrijven zoals in de definitie wordt beschreven. Dit kan je goed zien in figuur 3.

FIGUUR 3. Wortels van  $G_2$  uitgeschreven als lineaire combinatie van de basiswortels  $\alpha$  en  $\beta$ .



Dat er altijd zo'n basis  $\Delta$  bestaat voor ieder wortelsysteem, wordt in Humphreys (1972) bewezen door middel van een constructie op blz. 48. Zo'n basis is natuurlijk niet uniek.

Een handige eigenschap van basiswortels onderling is het volgende:

**Lemma 4.1.** Als  $\Delta$  een basis van  $\Phi$  is, dan geldt als  $\alpha, \beta \in \Delta$  met  $\alpha \neq \beta$ , dan  $(\alpha, \beta) \leq 0$  en  $\alpha - \beta$  is geen wortel in  $\Phi$ .

*Bewijs.* Bewijs uit ongerijmde; Laat er twee wortels  $\alpha, \beta \in \Phi$  zijn met  $(\alpha, \beta) > 0$ . Omdat door de veronderstelling geldt dat  $\alpha \neq \beta$  en zowiezo geldt dat  $\alpha \neq -\beta$ , volgt uit lemma 3.1 dat  $\alpha - \beta$  een wortel is. Maar dit is in tegenspraak met (B2).  $\square$

Dit bewijs komt uit Humphreys (1972).

4.2. Ordening en hoogste wortel.

Als je twee positieve wortels  $\alpha, \beta \in \Phi$  hebt en als  $\alpha + \beta$  ook een wortel is in  $\Phi$ , dan moet gelden dat  $\alpha + \beta$  ook een positieve wortel moet zijn. Je kan dus spreken van een partiële ordening  $\succ$  door  $\Delta$  op  $\Phi$ .

**Definitie 4.2** (ordening:  $\succ$ ). Laat  $\alpha, \beta \in \Phi$ . Dan geldt  $\alpha \succ \beta$  als  $\alpha - \beta$  een positieve sommatie van basiswortels is of  $\alpha = \beta$ .

Aangezien de ontbinding van  $\beta$  op de basis  $\Delta$  uniek is, kan men spreken over een hoogte van een wortel.

**Definitie 4.3** (hoogte). Laat  $\beta \in \Phi$ . Dan als de ontbinding van  $\beta$  op de basis  $\Delta$   $\beta = \sum k_\alpha \alpha$  ( $\alpha \in \Delta$ ) is, dan is de hoogte van  $\beta$ :  $ht(\beta) = \sum k_\alpha$  ( $\alpha \in \Delta$ ).

Het is eenvoudig in te zien dat we de volgende relatie hebben tussen de hoogte en de partiële ordening:  $\alpha \succ \beta \Rightarrow ht(\alpha) \geq ht(\beta)$ .

Aangezien er over hoogte en ordening wordt gesproken, kan je jezelf afvragen: Bestaat er een unieke hoogste wortel? Het antwoord hierop is dat zo een wortel bestaat, maar alleen als  $\Phi$  aan een bepaalde voorwaarde voldoet:  $\Phi$  moet irreducibel zijn.

**Definitie 4.4** (irreducibel). Een wortelsysteem  $\Phi$  is irreducibel als  $\Phi$  niet opgedeeld kan worden in twee niet lege deelverzamelingen zodat geldt dat elke wortel in de ene verzameling loodrecht staat op iedere wortel in de andere verzameling.

Nu kan worden bewezen dat er zo'n hoogste wortel bestaat.

**Lemma 4.2.** *Laat  $\Phi$  een irreducibel wortelsysteem zijn met basis  $\Delta$ . Dan geldt dat, relatief tot de partiële ordening  $\succ$ , er een unieke hoogste wortel  $\rho$  bestaat met de volgende eigenschappen:*

- $\alpha \neq \rho \Rightarrow ht(\alpha) < ht(\rho)$ ,
- $(\rho, \alpha) \geq 0 \forall \alpha \in \Delta$ ,
- Als  $\rho = \sum c_\alpha \alpha$  ( $\alpha \in \Delta$ ), dan geldt  $\forall \alpha \in \Delta : c_\alpha > 0$ .

*Bewijs.* Laat  $\rho = \sum c_\alpha \alpha$  ( $\alpha \in \Delta$ ) een hoogste wortel zijn in de ordening. Natuurlijk moet gelden dat  $\rho$  een positieve wortel is. Als  $\Delta_1 = \{\alpha \in \Delta : c_\alpha > 0\}$  en  $\Delta_2 = \{\alpha \in \Delta : c_\alpha = 0\}$ , dan is  $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$  een partitie.

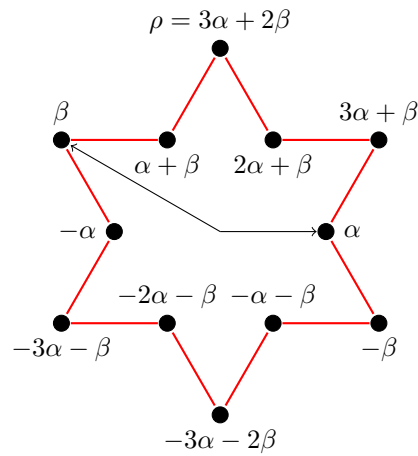
Stel dat  $\Delta_2$  niet leeg is. Dan geldt  $(\alpha, \rho) \leq 0$ ,  $\forall \alpha \in \Delta_2$  (dit volgt uit het feit dat  $\rho$  een positieve wortel is en lemma 4.1). Omdat  $\Phi$  irreducibel is, bestaat er minstens één  $\alpha \in \Delta_2$  die niet loodrecht staat op  $\Delta_1$ , waardoor moet gelden dat  $(\alpha, \alpha') < 0$  voor een bepaalde  $\alpha' \in \Delta_1$ , waardoor  $(\alpha, \rho) < 0$ . Dit impliceert met behulp van lemma 3.1 dat  $\rho + \alpha$  een wortel is in  $\Phi$ . Dit is in tegenspraak met de aanname dat  $\rho$  een hoogste wortel is in  $\Phi$ , omdat er een wortel gevonden is dat hoger is dan  $\rho$ . Dus  $\Delta_2$  is een lege verzameling en moet gelden dat  $\forall \alpha \in \Delta : c_\alpha > 0$ . Dit argument laat ook zien dat  $\forall \alpha \in \Delta : (\rho, \alpha) \geq 0$  (met  $(\alpha, \rho) > 0$  voor tenminste één  $\alpha \in \Delta$ , omdat  $\Delta$  de ruimte  $E$  opspant).

Laat nu  $\rho'$  een andere hoogste wortel zijn in  $\Phi$ . Voor  $\rho'$  moet dus ook gelden dat er tenminste één  $\alpha \in \Delta$  bestaat waarvoor geldt  $(\alpha, \rho') > 0$ . Er volgt dat  $(\rho, \rho') > 0$ , waardoor uit lemma 3.1 volgt dat  $\rho - \rho'$  een wortel is in  $\Phi$ , tenzij  $\rho = \rho'$ . Maar als  $\rho - \rho'$  een wortel is, dan moet gelden dat  $\rho \succ \rho'$  of  $\rho' \succ \rho$ , wat strijdig is. Dus  $\rho$  is uniek. □

Voor de laatste keer zal  $G_2$  als voorbeeld genomen worden. Zoals je in figuur 4 kan zien, als je  $\alpha$  en  $\beta$  neemt als basis voor  $G_2$ , dan dan  $3\alpha + 2\beta$  de hoogste wortel  $\rho$  is in  $\Phi$ . Je kan ook zien dat de hoogte van  $\rho$  altijd strikt groter is dan ieder andere wortel is  $G_2$  en dat alle coëfficiënten van  $\rho$  voor  $\alpha$  en  $\beta$  strikt groter zijn dan 0.



FIGUUR 4.  $G_2$ : de langste wortel expliciet aangegeven



### 4.3. Eigenschappen positieve wortels.

Laat  $\Delta$  een vaste basis zijn voor een wortelsysteem  $\Phi$ .

**Lemma 4.3.** *Laat  $\beta \notin \Delta$  een positieve wortel zijn. Dan moet er een  $\alpha \in \Delta$  bestaan, zodat  $\beta - \alpha$  een wortel is.*

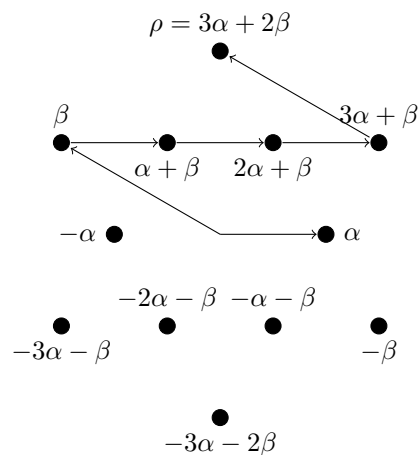
Dit lemma wordt in Humphreys (1972) bewezen met behulp van een feit dat volgt uit de constructie van het bestaan van de basis.

**Lemma 4.4.** *Iedere positieve wortel  $\beta$  kan geschreven worden in de vorm  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$  ( $\alpha_i \in \Delta$ , niet per se verschillend) zodat iedere partiële som  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i$  een wortel is.*

*Bewijs.* Gebruik lemma 4.3 en inductie. □

Er kan hierdoor dus een pad gevonden worden van iedere postieve wortel in het wortelsysteem naar een of meerdere wortels in de basis. Dit kan je goed zien in figuur 5 voor het wortelsysteem  $G_2$ .

FIGUUR 5.  $G_2$ : een pad naar iedere positieve wortel



#### 4.4. Eigenschappen positieve wortels in irreducibel wortelsysteem.

Lemma 4.5 en stelling 4.6 die in dit hoofdstuk worden bewezen zijn nodig voor een bewijs later in het verslag.

Laat  $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  een vaste basis zijn voor een irreducibel wortelsysteem  $\Phi$  in  $E$  en laat  $\rho = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$  de hoogste wortel zijn in  $\Phi$ .

**Lemma 4.5.** *Laat  $\beta \neq \rho$  een positieve wortel zijn in  $\Phi$  met  $\rho - \beta \notin \Phi$ . Dan moet er een positieve wortel  $\gamma \in \Phi$  bestaan, zó dat  $\beta + \gamma \in \Phi$ .*

*Bewijs.* Het volgende gedeelte van het bewijs zal uit het ongerijmde zijn.

Stel er bestaat geen positieve wortel  $\gamma$ , zodat geldt  $\gamma + \beta$  een wortel is. Dan moet gelden dat  $(\beta, \gamma) \geq 0$  voor iedere positieve wortel  $\gamma$ .

Dus moet er gelden door lemma 4.2 dat  $(\beta, \alpha_i) \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$ .

Aangezien  $\Delta$  het wortelsysteem  $\Phi$  opspant, moet er gelden dat er een  $\alpha_i$  bestaat, zodat  $(\beta, \alpha_i) > 0$ .

Doordat  $c_{\alpha_i} > 0, i = 1, 2, \dots, n$ , moet gelden dat  $(\beta, \rho) = \sum_{i=1}^n c_{\alpha_i} (\beta, \alpha_i) > 0$ .

Aangezien  $\rho - \beta \notin \Phi$  en  $\beta \neq \rho$ , volgt uit lemma 3.2 dat  $(\beta, \rho) \leq 0$ .

Maar het kan niet tegelijkertijd gelden dat  $(\beta, \rho) > 0$  en dat  $(\beta, \rho) \leq 0$ . Er volgt dus een tegenspraak.

Dus moet er een positieve wortel  $\gamma$  bestaan zodat geldt dat  $\gamma + \beta$  een wortel is in  $\Phi$ . □

**Stelling 4.6.** *Laat  $\beta \neq \rho$  een positieve wortel zijn in  $\Phi$ . Dan geldt  $\rho \succ \beta$ .*

*Bewijs.* Stel  $\rho - \beta \notin \Phi$ .

Er zal nu een proces beschreven worden.

Begin:  $\rho - \beta \notin \Phi$  en  $\beta \neq \rho$ . Dan moet er volgens lemma 4.5 gelden dat er een positieve wortel  $\gamma \in \Phi$  bestaat, zodat geldt  $\beta + \gamma \in \Phi$ , dat op zijn beurt weer een positieve wortel is.

Als  $ht(\beta + \gamma) = ht(\rho)$ , dan moet gelden, omdat  $\rho$  uniek is, dat  $\beta + \gamma = \rho$ . Dus  $\rho \succ \beta + \gamma \succ \beta$ .

Anderzijds, als  $ht(\beta + \gamma) < ht(\rho)$ , dan  $\beta + \gamma \neq \rho$ .

Als  $\rho - (\beta + \gamma) \in \Phi$ , dan  $\rho \succ (\beta + \gamma) \succ \beta$ . Dus stel  $\rho - (\beta + \gamma) \notin \Phi$ .

Nu is er weer een scenario gecreëerd zoals in lemma 4.5, dus de stappen kunnen weer herhaald worden.

Iedere keer dat lemma 4.5 wordt toegepast, heeft de nieuwe wortel in  $\Phi$  een hoogte gekregen die strikt hoger is dan de wortel in  $\Phi$  aan het begin van die stap.

Na dit proces heel vaak uitgevoerd te hebben en iedere keer de optie te hebben gekozen waarvoor de gevraagde eigenschap ( $\beta \succ \rho$ ) niet geldt, moet je een wortel  $\beta + \gamma_1 + \dots + \gamma_m$  krijgen waarbij  $ht(\beta + \gamma_1 + \dots + \gamma_m) = ht(\rho)$ . Hierdoor moet gelden  $\rho = \beta + \gamma_1 + \dots + \gamma_m$  en moet uiteindelijk volgen dat  $\rho \succ (\beta + \gamma_1 + \dots + \gamma_m) \succ \dots \succ \beta$ .

Aangezien uit alle opties in het voorgeschreven proces moet volgen dat  $\rho \succ \beta$ , is het bewijs klaar. □

Dus als  $\beta = \sum k_\alpha \alpha$  ( $\alpha \in \Delta$ ) een positieve wortel is in  $\Phi$ , dan geldt  $\forall \alpha \in \Delta : c_\alpha \geq k_\alpha$ .

## 5. WEYL-GROEP EN ALLE WORTELS VERKRIJGEN MET BASIS

De Weyl-groep is de groep gegenereerd door alle  $\sigma_\beta, \beta \in \Phi$ . Laat  $\Delta$  een basis zijn van het wortelsysteem  $\Phi$ . Dan gelden de volgende twee uitspraken:

- De Weyl-groep wordt gegenereerd door  $\sigma_\alpha$  ( $\alpha \in \Delta$ ),
- Als  $\alpha$  een wortel in  $\Phi$  is, dan bestaat er een  $\sigma$  in de Weyl-groep, zodat geldt  $\sigma(\alpha) \in \Delta$ .

Voor het bewijs van deze uitspraken, zie Humphreys (1972).

Aangezien iedere  $\sigma$  gemaakt kan worden uit  $\sigma_\alpha, \alpha \in \Delta$  en je iedere wortel kan bereiken uit de basis door zo'n spiegeling, kan je de volgende definitie maken: Neem  $\beta \in \Phi$ . Stel voor  $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \sigma_{\alpha_2} \circ \circ \circ \sigma_{\alpha_k}$ ,  $\alpha_i \in \Delta$  geldt dat  $\sigma(\beta) \in \Delta$  met  $k$  minimaal, dan is het aantal stappen om  $\beta$  te bereiken uit  $\Delta$  gelijk is aan  $k$ . Met  $k$  minimaal wordt bedoeld dat er geen  $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \sigma_{\alpha_2} \circ \circ \circ \sigma_{\alpha_l}$ ,  $\alpha_i \in \Delta$  bestaat, zodat geldt  $\sigma(\beta) \in \Delta$  en  $l < k$ .

Aangezien er een eindig aantal wortels in een wortelsysteem zit en in de definitie een minimale hoeveelheid spiegelingen gebruikt wordt, kan je verzamelingen maken van de wortels die je pas na  $n$  stappen kan bereiken vanuit de basis.

## 5.1. Uitleg algoritme.

Nu volgt een uitleg over hoe het eerste deel van het algoritme uit Appendix A werkt om alle wortels te bepalen in een wortelsysteem als je een basis hebt. Als alle wortels verkregen zijn, kunnen ze gebruikt worden om de hoogste wortel te vinden met het tweede deel van het algoritme in Appendix A (wat in een later hoofdstuk zal worden uitgelegd).

Neem de wortels in een basis  $\Delta$  van het wortelsysteem en zet ze in een verzameling  $A_0$ .

Neem nu een wortel  $\alpha$  uit  $\Delta$  en pas  $\sigma_\alpha$  toe op alle wortels uit  $A_0$ . Als een wortel niet in  $A_0$  zit, voeg je deze wortel toe aan de verzameling  $A_1$ . Herhaal het toepassen van  $\sigma_\alpha$  op  $A_0$  voor alle wortels  $\alpha$  uit  $\Delta$  en voeg alle wortels die niet in  $A_0$  zitten toe aan  $A_1$ . Aan het einde van deze stap van het algoritme, is  $A_1$  de verzameling van alle wortels die je in minimaal 1 stap kan bereiken vanuit de basis  $\Delta$ .

Herhaal op deze manier het proces om van een verzameling wortels  $A_i$  een verzameling wortels  $A_{i+1}$  te maken. Nu moet je wel checken of de nieuwe wortels niet in  $A_0$  t/m  $A_i$  zitten.

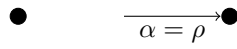
Alle verzamelingen  $A_i$  zijn de verzamelingen van alle wortels die je in minimaal  $i$  stappen kan bereiken. Als er bij de verzameling  $A_n$  geldt dat  $A_{n+1} = \emptyset$ , dan zijn alle wortels bereikt en is de vereniging van  $A_0$  t/m  $A_n$  dus het volledige wortelsysteem.

## 6. VISUALISATIE WORTELSYSTEMEN

In dit gedeelte van het verslag zijn alle irreducibele 1-dimensionale, 2-dimensionale en 3-dimensionale wortelsystemen weergegeven.

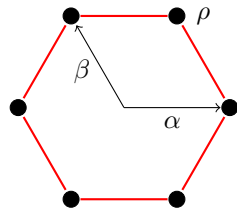
## 6.1. 1D.

$A_1$ :

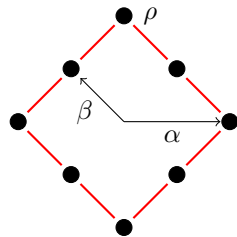


## 6.2. 2D.

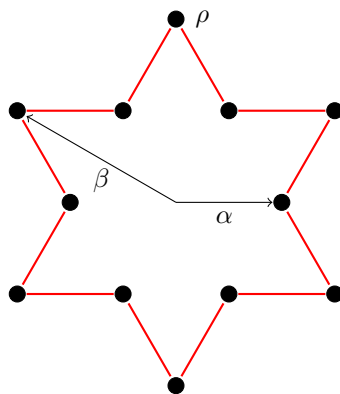
$A_2$ :



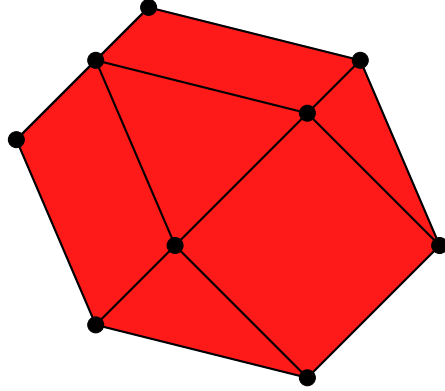
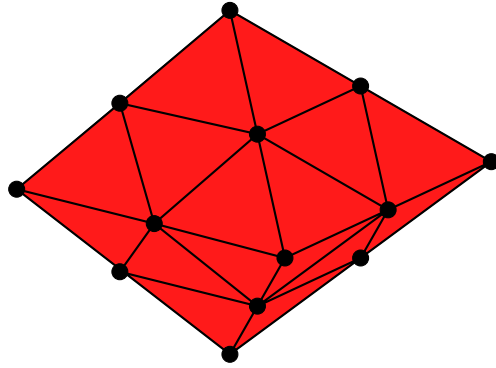
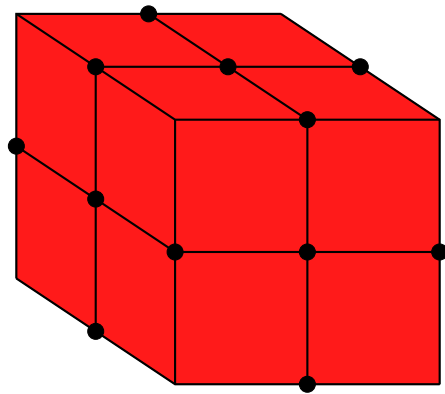
$B_2$ :



$G_2$ :



## 6.3. 3D.

 $A_3$ : $B_3$ : $C_3$ :

## 7. HOOGSTE WORTEL VINDEN IN EEN WORTELSYSTEEM

Er zal in dit hoofdstuk een manier besproken worden om de hoogste wortel te vinden als je een lijst hebt met alle wortels in het irreducibele wortelsysteem en een basis gekozen hebt.

Begin met een basis  $\Delta$  van het wortelsysteem  $\Phi$ . Dit zijn alle wortels in  $\Phi$  van hoogte 1.

Neem vervolgens twee wortels uit de basis en tel deze bij elkaar op. Als deze een wortel oplevert in  $\Phi$ , zet deze in een nieuwe lijst. Herhaal deze stap totdat je alle combinaties van wortels hebt gehad. Nu heb je een nieuwe lijst gekregen van wortels met hoogte 2. Als de hoogte van de langste wortel strikt groter is dan 2, dan moet er door lemma 4.4 een wortel in die lijst zitten dat op het pad naar de langste wortel zit.

Neem nu een wortel uit de basis met een wortel uit de nieuwe niet-lege lijst en herhaal het proces. Uiteindelijk zal je een lijst krijgen met alleen maar één wortel: de hoogste wortel. Dit komt omdat de hoogste wortel uniek is en ieder andere wortel lager is dan de hoogste wortel.

Dit is een beschrijving van het tweede deel van de code uit Appendix A. Deze code gaat dus over het vinden van de hoogste wortel.

## 8. CLASSIFICATIE AAN DE HAND VAN DYNKIN DIAGRAMMEN

Om de verbanden tussen de wortels in een basis van een wortelsysteem weer te geven, kan gebruikt gemaakt worden van een Dynkin diagram. Een Dynkin diagram is een graaf die het wortelsysteem karakteriseert en wordt als volgt gemaakt:

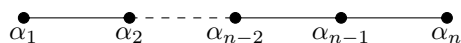
Laat  $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  een basis zijn van het wortelsysteem. Dan worden de wortels in de basis als knopen aangegeven en worden de verbanden tussen de wortels  $\alpha_i, \alpha_j, i \neq j$  als volgt weergegeven:

- Als  $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle = 0$ , dan zit er geen tak tussen de knopen corresponderend met  $\alpha_i$  en  $\alpha_j$ ,
- Als  $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle = 1$ , dan zit er één tak tussen de knopen corresponderend met  $\alpha_i$  en  $\alpha_j$ ,
- Als  $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle = 2$ , dan zitten er een dubbele tak tussen de knopen corresponderend met  $\alpha_i$  en  $\alpha_j$ ,
- Als  $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle = 3$ , dan zitten er een driebubbele tak tussen de knopen corresponderend met  $\alpha_i$  en  $\alpha_j$ .

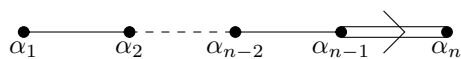
Als er een dubbele of driebubbele tak tussen de knopen zit, dan weet je niet per se welke van de twee wortels groter is. Daarom wordt er ook een pijl toegevoegd die naar de kleinste van de twee wortels toe wijst.

Nu volgt er de classificatie van irreducibele wortelsystemen aan de hand van Dynkin diagrammen. Dat dit alle wortelsystemen zijn, wordt in Humphreys (1972) bewezen.

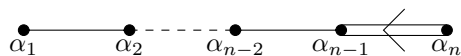
$A_n$  ( $n \geq 1$ ):



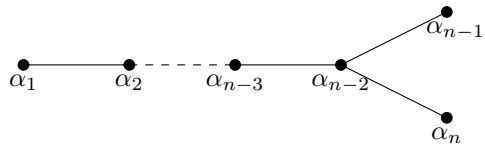
$B_n$  ( $n \geq 2$ ):



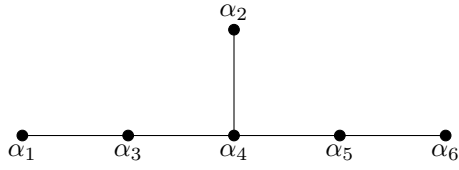
$C_n$  ( $n \geq 3$ ):



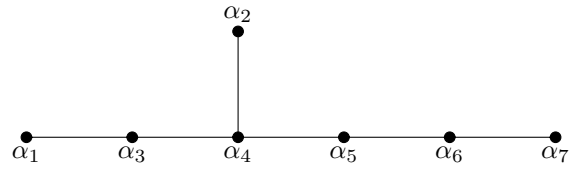
$D_n$  ( $n \geq 4$ ):



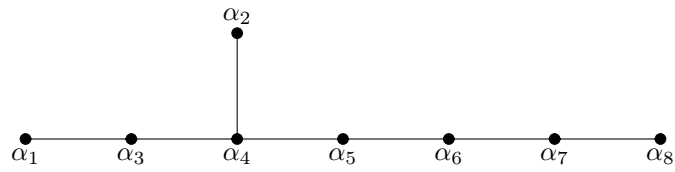
$E_6$ :



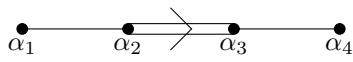
$E_7$ :



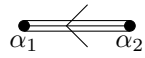
$E_8$ :



$F_4$ :



$G_2$ :



## 9. DEELWORTELSYSTEMEN

Nu de belangrijkste eigenschappen van wortelsystemen zijn besproken, kan worden begonnen aan het beantwoorden van de vraag welke wortelsystemen er als deelwortelsystemen in een ander wortelsysteem zitten. Deze kan je in twee categorieën splitsen: deelwortelsystemen van dezelfde rang als het wortelsysteem in kwestie of een deelwortelsysteem van een rang lager. De rang van een wortelsysteem is gelijk aan de dimensie van de ruimte die de wortels in het wortelsysteem opspannen. Het is eenvoudiger om te beginnen met het vinden van een deelwortelsysteem van een rang lager, dus zal hier eerst mee begonnen worden.

Een handige manier om deelwortelsystemen te vinden van een rang lager, is om naar het Dynkin diagram te kijken. Het lijkt logisch dat als je een punt weghaalt uit de basis, dat het een basis wordt voor een deelwortelsysteem. Nu moet dit nog bewezen worden.

De volgende stelling zegt eerst welk deelwortelsysteem de uiteindelijke basis bij zal horen en geeft daarna aan dat het ook werkelijk een basis is voor het deelwortelsysteem. Dit is omdat volgens de definitie van de basis volgt dat je pas van een basis kan spreken, als je een wortelsysteem hebt.

**Stelling 9.1.** *Laat  $n \geq 2$  en  $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  een basis zijn van een wortelsysteem  $\Phi$ . Laat  $\Phi' = \{\gamma \in \Phi : \gamma = \sum k_\alpha \alpha, \alpha \in \Delta, k_{\alpha_n} = 0\}$ . Dan gelden de volgende twee uitspraken:*

- $\Phi'$  is een wortelsysteem in z'n eigen opspansel  $E'$ ,
- $\Delta' = \Delta \setminus \{\alpha_n\}$  is een basis voor  $\Phi'$ .

*Bewijs.* Eerst zal bewezen worden dat **(R1)** t/m **(R4)** gelden voor  $\Phi'$ .

**(R1):**  $\Phi' \subseteq \Phi$  en  $\alpha_1 \in \Phi'$ , dus  $\Phi'$  is eindig en niet leeg, bevat 0 niet en de wortels in  $\Phi'$  spannen een deelruimte  $E'$  op in  $E$ .

**(R2):** Als  $k_{\alpha_n} = 0$ , dan geldt ook  $-k_{\alpha_n} = 0$ . Ook geldt  $\gamma \in \Phi \Rightarrow -\gamma \in \Phi$ , dus  $\gamma \in \Phi' \Rightarrow -\gamma \in \Phi'$ .  $\Phi' \subseteq \Phi$ , dus als  $\gamma \in \Phi'$ , dan zijn  $\gamma$  en  $-\gamma$  de enige veelvouden van  $\gamma$  in  $\Phi'$ .

**(R3):** Omdat  $\Phi' \subseteq \Phi$  en **(R3)** geldt voor  $\Phi$ , geldt al dat  $\forall \beta \in \Phi', \sigma_\beta : \Phi' \rightarrow \Phi$  een injectieve afbeelding is. Aangezien  $\Phi'$  eindig is, dan moet het aantal elementen in  $\sigma_\beta(\Phi')$  gelijk zijn aan het aantal elementen in  $\Phi'$ .

Laat  $\gamma = \sum k_\alpha \alpha$  ( $\alpha \in \Delta'$ ).  $\sigma_\beta(\gamma) = \gamma - \langle \gamma, \beta \rangle \beta$ . Aangezien  $\langle \gamma, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$  en voor  $\gamma$  en  $\beta$  geldt dat de coëfficiënt voor  $\alpha_n$  gelijk aan 0 is, geldt voor  $\sigma_\beta(\gamma)$  dat de coëfficiënt voor  $\alpha_n$  ook gelijk moet zijn aan 0 en dat de overige coëfficiënten gehele getallen zijn. Dus  $\forall \beta \in \Phi' : \sigma_\beta(\Phi') \subseteq \Phi'$ .

Omdat geldt  $\forall \beta \in \Phi'$  dat het aantal elementen in  $\sigma_\beta(\Phi')$  gelijk moet zijn aan  $\Phi'$ , moet gelden dat  $\forall \beta \in \Phi' : \sigma_\beta(\Phi') = \Phi'$ .

**(R4):**  $\Phi' \subseteq \Phi$ , dus triviaal.

Aangezien  $\Phi'$  aan **(R1)** t/m **(R4)** voldoet, geldt dat  $\Phi'$  een wortelsysteem is in  $E'$ .

Nu zal bewezen worden dat  $\Delta'$  een basis is voor  $\Phi'$ .

**(B2):** Laat  $\beta = \sum_{i=1}^n k_{\alpha_i} \alpha_i$  een positieve wortel in  $\Phi$  zijn die ook in  $\Phi'$  zit. Aangezien er geldt dat  $k_{\alpha_n} = 0$ , dan kunnen de coëfficiënten voor  $\beta$  in  $\Phi$  ook gebruikt worden als representatie voor  $\beta$  in  $\Phi'$ . Hetzelfde geldt voor de negatieve wortels. Er blijkt dus dat iedere wortel in  $\Phi'$  beschreven kan worden zoals in **(B2)** staat.

**(B1):**  $\alpha_1$  t/m  $\alpha_{n-1}$  zijn allemaal lineair onafhankelijk. Aangezien alle wortels in  $\Phi'$  gemaakt kan worden met lineaire combinaties van wortels in  $\Delta'$ , geldt dat de wortels in  $\Delta'$  dezelfde ruimte



opspannen als  $\Phi'$ .

Dus  $\Delta'$  is een basis van  $\Phi'$ . □

In tabel 2 staat een lijst van de wortelsystemen die op deze manier uit irreducibele wortelsystemen in  $E_8$  te verkrijgen zijn.

**Tabel 2**

wortelsysteem	deelwortelsystemen van één rang lager							
$E_8$	$E_7$	$E_6 \times A_1$	$D_7$	$D_5 \times A_2$	$A_7$	$A_6 \times A_1$	$A_4 \times A_3$	$A_4 \times A_2 \times A_1$
$E_7$	$E_6$		$D_6$	$D_5 \times A_1$	$A_6$	$A_5 \times A_1$	$A_4 \times A_2$	$A_3 \times A_2 \times A_1$
$E_6$			$D_5$			$A_4 \times A_1$		$A_2 \times A_2 \times A_1$
$D_8$	$D_7$	$D_6 \times A_1$	$D_5 \times A_2$	$D_4 \times A_3$	$A_7$	$A_4 \times A_3$	$A_5 \times A_1 \times A_1$	
$D_7$	$D_6$	$D_5 \times A_1$	$D_4 \times A_2$		$A_6$	$A_3 \times A_3$	$A_4 \times A_1 \times A_1$	
$D_6$	$D_5$	$D_4 \times A_1$			$A_5$	$A_3 \times A_2$	$A_3 \times A_1 \times A_1$	
$D_5$	$D_4$				$A_4$	$A_3 \times A_1$	$A_2 \times A_1 \times A_1$	
$D_4$					$A_3$		$A_1 \times A_1 \times A_1$	
$A_8$	$A_7$	$A_6 \times A_1$	$A_5 \times A_2$	$A_4 \times A_3$				
$A_7$	$A_6$	$A_5 \times A_1$	$A_4 \times A_2$	$A_3 \times A_3$				
$A_6$	$A_5$	$A_4 \times A_1$	$A_3 \times A_2$					
$A_5$	$A_4$	$A_3 \times A_1$	$A_2 \times A_2$					
$A_4$	$A_3$	$A_2 \times A_1$						
$A_3$	$A_2$	$A_1 \times A_1$						
$A_2$	$A_1$							

TABEL 2. Tabel met alle irreducibele wortelsystemen tot en met rang 8 in  $E_8$  die je kan maken door één van de wortels in de basis te verwijderen. In de eerste kolom staan de irreducibele wortelsystemen in  $E_8$  en in de rij achter ieder irreducibel wortelsysteem de deelwortelsystemen hiervan.

## 10. BASIS VERKRIJGEN DOOR VERVANGING MET HOOGSTE WORTEL

Uit dit hoofdstuk zal blijken dat er een basis van een deelwortelsysteem van dezelfde rang gemaakt kan worden in een irreducibel wortelsysteem door één van de wortels in de oorspronkelijke basis te vervangen met negatief de hoogste wortel in het wortelsysteem. Om dit feit te bewijzen, beschrijft het volgende lemma het deelwortelsysteem van dezelfde rang die je krijgt als je de laatste wortel in de basis vervangt met negatief de hoogste wortel en zegt daarna dat het ook echt een basis is voor dat deelwortelsysteem.

Laat  $\Phi$  een irreducibel wortelsysteem zijn die de ruimte  $E$  opspand,  $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  een basis van  $\Phi$  en  $\rho = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$  de hoogste wortel in  $\Phi$  zijn.

**Lemma 10.1.** *Laat  $\Phi' = \{\gamma \in \Phi : \gamma = \sum k_\alpha \alpha, \alpha \in \Delta, k_{\alpha_n} \in c_{\alpha_n} \mathbb{Z}\}$ . Dan gelden de volgende twee uitspraken:*

- $\Phi'$  is een wortelsysteem in  $E$ ,
- $\Delta' = (\Delta \cup \{-\rho\}) \setminus \{\alpha_n\}$  is een basis voor  $\Phi'$ .

*Bewijs.* Eerst zal bewezen worden dat **(R1)** t/m **(R4)** gelden voor  $\Phi'$ .

**(R1):**  $\Phi' \subseteq \Phi$ , dus  $\Phi'$  is van eindige grootte, bevat geen 0 en de wortels in  $\Phi'$  spannen maximaal  $E$  op.

$\alpha_1$  t/m  $\alpha_{n-1}$  zijn allemaal lineair onafhankelijk. Volgens lemma 4.2 kan je  $-\rho$  niet meer vormen met de wortels in  $\Delta$  als je één van de wortels niet gebruikt. Dus zijn de wortels  $\alpha_1$  t/m  $\alpha_{n-1}$  en  $-\rho$  allemaal lineair onafhankelijk. Aangezien de wortels in  $\Delta$  de ruimte  $E$  opspannen, spannen de wortels  $\alpha_1$  t/m  $\alpha_{n-1}$  en  $-\rho$  de ruimte  $E$  op.

Er geldt vervolgens doordat alle wortels van  $\alpha_1$  t/m  $\alpha_{n-1}$  en  $-\rho$  in  $\Phi'$  zitten, spannen de wortels in  $\Phi'$  minimaal  $E$  op. Dus de wortels in  $\Phi'$  spannen  $E$  op.

**(R2):** Als  $k_{\alpha_n} \in c_{\alpha_n} \mathbb{Z}$ , dan geldt ook  $-k_{\alpha_n} \in c_{\alpha_n} \mathbb{Z}$ . Ook geldt  $\gamma \in \Phi \Rightarrow -\gamma \in \Phi$ , dus  $\gamma \in \Phi' \Rightarrow -\gamma \in \Phi'$ .

$\Phi' \subseteq \Phi$ , dus als  $\gamma \in \Phi'$ , dan zijn  $\gamma$  en  $-\gamma$  de enige veelvouden van  $\gamma$  in  $\Phi'$ .

**(R3):** Omdat  $\Phi' \subseteq \Phi$  en **(R3)** geldt voor  $\Phi$ , geldt al dat  $\forall \beta \in \Phi', \sigma_\beta : \Phi' \rightarrow \Phi$  een injectieve afbeelding is. Aangezien  $\Phi'$  eindig is, dan moet het aantal elementen in  $\sigma_\beta(\Phi')$  gelijk zijn aan het aantal elementen in  $\Phi'$ .

Laat  $\gamma = \sum k_\alpha \alpha$  ( $\alpha \in \Delta'$ ).  $\sigma_\beta(\gamma) = \gamma - \langle \gamma, \beta \rangle \beta$ . Aangezien  $\langle \gamma, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$  en omdat voor  $\gamma$  en  $\beta$  geldt dat de coëfficiënt voor  $\alpha_n$  een geheel veelvoud is van  $c_{\alpha_n}$ , geldt dat voor  $\sigma_\beta(\gamma)$  geldt dat de coëfficiënt voor  $\alpha_n$  ook een geheel veelvoud moet zijn van  $c_{\alpha_n}$  en dat de rest van de coëfficiënten gehele getallen zijn. Dus  $\forall \beta \in \Phi' : \sigma_\beta(\Phi') \subseteq \Phi'$ .

Omdat  $\forall \beta \in \Phi'$  het aantal elementen in  $\sigma_\beta(\Phi')$  gelijk moet zijn aan  $\Phi'$ , moet gelden dat  $\forall \beta \in \Phi' : \sigma_\beta(\Phi') = \Phi'$ .

**(R4):**  $\Phi' \subseteq \Phi$ , dus triviaal.

Aangezien  $\Phi'$  aan **(R1)** t/m **(R4)** voldoet, geldt dat  $\Phi'$  een wortelsysteem is in  $E$ .

Nu zal bewezen worden dat  $\Delta'$  een basis is voor  $\Phi'$ .

**(B1):** Dat  $\Delta'$  een basis voor  $E$  is, is al bewezen in **(R1)**.

(B2): Laat  $\beta = \sum_{i=1}^n k_{\alpha_i} \alpha_i$  een positieve wortel in  $\Phi$  die ook in  $\Phi'$  zit. Uit stelling 4.6 volgt dat  $\forall \alpha \in \Delta : c_\alpha \geq k_\alpha$ .

Aangezien  $0 \leq k_{\alpha_n} \leq c_{\alpha_n}$ , gelden er twee opties voor  $\beta \in \Phi$  die ook in  $\Phi'$  zit:  $k_{\alpha_n} = 0$  of  $k_{\alpha_n} = c_{\alpha_n}$ .

Als  $k_{\alpha_n} = 0$ , dan  $\beta = \sum_{i=1}^{n-1} k_{\alpha_i} \alpha_i$ . Dus  $\beta$  kan geschreven worden als  $\beta = \sum_{i=1}^{n-1} k_{\alpha_i} \alpha_i + 0 \cdot (-\rho)$  met  $k_{\alpha_i}$  allemaal positieve gehele getallen.

Stel nu  $k_{\alpha_n} = c_{\alpha_n}$ .

$$\rho = \sum c_\alpha \alpha \ (\alpha \in \Delta) \Rightarrow c_{\alpha_n} \alpha_n = -(-\rho) - \sum_{i=1}^{n-1} c_{\alpha_i} \alpha_i = k_{\alpha_n} \alpha_n.$$

Vervolgens vinden we de volgende vergelijking:

$$\beta = \sum_{i=1}^{n-1} k_{\alpha_i} \alpha_i + k_{\alpha_n} \alpha_n = \sum_{i=1}^{n-1} k_{\alpha_i} \alpha_i + \left( -(-\rho) - \sum_{i=1}^{n-1} c_{\alpha_i} \alpha_i \right) = \sum_{i=1}^{n-1} (k_{\alpha_i} - c_{\alpha_i}) \alpha_i - (-\rho).$$

Er geldt dat  $k_{\alpha_i} - c_{\alpha_i} \leq 0$ . Als  $k'_{\alpha_i} = k_{\alpha_i} - c_{\alpha_i}$  voor  $i = 1, 2, \dots, n-1$  en  $k'_{-\rho} = -1$ , dan kan je  $\beta$  uitdrukken als  $\beta = \sum_{i=1}^{n-1} k'_{\alpha_i} \alpha_i + k'_{-\rho} \cdot (-\rho)$  met  $k'_{\alpha_i}$  allemaal negatieve gehele getallen.

Op dezelfde manier volgt dat voor alle negatieve wortels met  $k_{\alpha_n} = 0$  of  $k_{\alpha_n} = -c_{\alpha_n}$  uit  $\Phi$  in  $\Phi'$  zitten.

Dus  $\Delta'$  is een basis voor  $\Phi'$ . □

Met dit lemma is het makkelijk te bewijzen dat als je één willekeurige wortel vervangt met negatief de hoogste wortel, dat je dan een basis krijgt voor een deelwortelsysteem met dezelfde rang.

**Stelling 10.2.** *Neem een irreducibel wortelsysteem  $\Phi$  met een vaste basis  $\Delta$ . Als er één wortel in de basis vervangen wordt door de tegengestelde van de hoogste wortel, dan geeft dit een basis van deelwortelsysteem van dezelfde rang.*

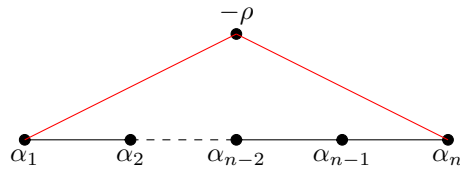
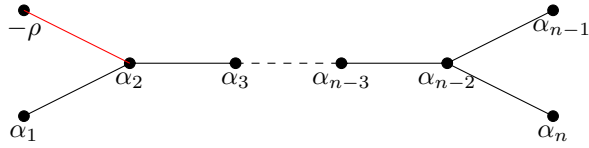
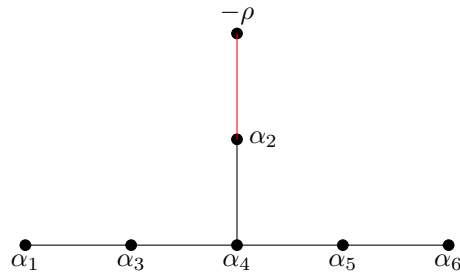
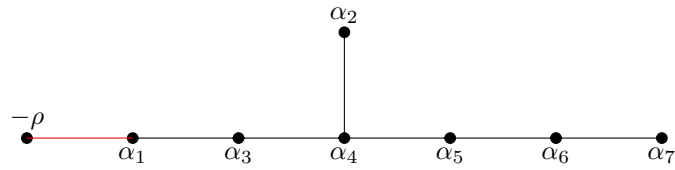
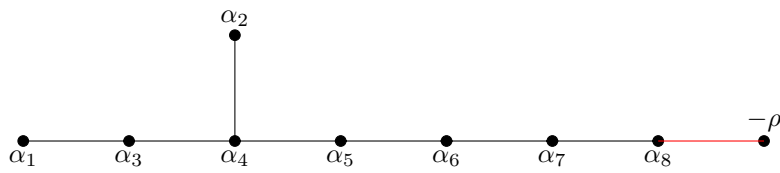
*Bewijs.* Laat  $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  en laat  $\rho$  de hoogste positieve wortel zijn. Zonder verlies van algemeenheid, vervang  $\alpha_n$  met  $-\rho$  in  $\Delta$  en noem dit  $\Delta'$ . Uit het voorgaande lemma 10.1 volgt het gevraagde. □

### 10.1. Deelwortelsystemen van dezelfde rang.

Een handige manier om te zien hoe het Dynkin diagram van de nieuwe deelwortelsystemen er uit gaan zien, zal er gebruik gemaakt worden van Affiene Dynkin diagrammen. Zo'n Affiene Dynkin diagram kan op de volgende manier geïnterpreteerd worden voor hoe het in dit verslag wordt gebruikt: In het diagram gelden dezelfde regels als in een Dynkin diagram, namelijk dat de knopen unieke wortels zijn en het soort tak tussen de wortels het verband tussen de twee wortels aangeeft. Hetgeen wat anders is, is dat nu minus de hoogste wortel als extra punt in het diagram wordt toegevoegd. In de volgende diagrammen van  $A_n, D_n$  en  $E_n$  zijn de wortels genomen uit een basis van het wortelsysteem en de corresponderende hoogste wortel.

Het  $\infty$  teken rechts van de tak tussen de twee wortels in  $A_1$  staat ervoor dat de twee hypervlakken loodrecht op de twee wortels elkaar niet overlappen.

Je kan het zien als twee spiegels die evenwijdig tegenover elkaar staan. Als je tussen die twee spiegels in staat, dan zie je (theoretisch) jezelf oneindig vaak. Hetzelfde geldt voor oneindig vaak de knopen in de twee hypervlakken spiegelen, zodat je een oneindig lange rij krijgt van knopen en hypervlakken.

$\tilde{A}_1$  $\tilde{A}_n$  ( $n \geq 2$ ): $\tilde{D}_n$  ( $n \geq 4$ ) $\tilde{E}_6$  $\tilde{E}_7$  $\tilde{E}_8$ 

Als je uit deze diagrammen één wortel weghaalt, dan krijg je het Dynkin diagram van het deelwortelsysteem.

In tabel 3 staat een lijst met alle deelwortelsystemen die je op deze manier kan verkrijgen uit irreducibele wortelsystemen in  $E_8$  en die niet hetzelfde zijn als het wortelsysteem waar ze vandaan komen. Hiermee wordt bedoeld dat je wel bijvoorbeeld  $D_n$  uit  $D_n$  kan halen, maar die zal dan niet in deze tabel staan.

**Tabel 3**

wortelsysteem	deelwortelsystemen van dezelfde rang							
$E_8$	$D_8$	$A_8$	$E_7 \times A_1$	$E_6 \times A_2$	$D_5 \times A_3$	$A_7 \times A_1$	$A_4 \times A_4$	$A_5 \times A_2 \times A_1$
$E_7$		$A_7$	$D_6 \times A_1$	$A_5 \times A_2$				$A_3 \times A_3 \times A_1$
$E_6$			$A_5 \times A_1$					$A_2 \times A_2 \times A_2$
$D_8$			$D_5 \times A_3$	$D_4 \times D_4$				$D_6 \times A_1 \times A_1$
$D_7$			$D_4 \times A_3$					$D_5 \times A_1 \times A_1$
$D_6$			$A_3 \times A_3$					$D_4 \times A_1 \times A_1$
$D_5$								$A_3 \times A_1 \times A_1$
$D_4$								$A_1 \times A_1 \times A_1 \times A_1$

TABEL 3. Tabel met alle wortelsystemen die je kan maken uit een irreducibel wortelsysteem van rang 8 of minder door één van de wortels in de basis te vervangen met de langste wortel uit de basis. Uit de wortelsystemen  $A_n$  kan je op deze manier alleen  $A_n$  verkrijgen. Hierdoor staat  $A_1$  t/m  $A_8$  niet in de tabel.

## 11. CONCLUSIE

In dit verslag zijn er twee manier besproken om van een basis van een wortelsysteem een andere basis te maken van een deelwortelsysteem:

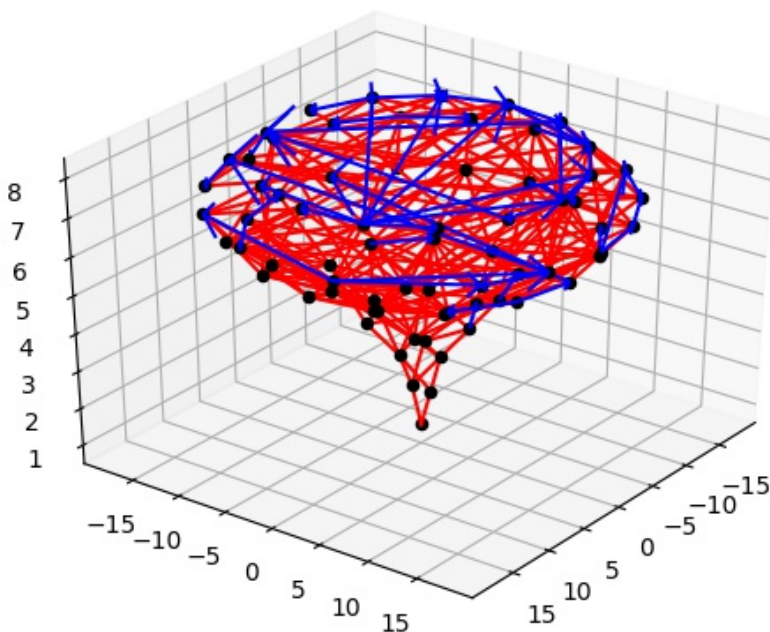
- één wortel uit de basis weghalen,
- vervanging van een wortel uit de basis een irreducibel wortelsysteem met de negatieve hoogste wortel in dat irreducibel wortelsysteem.

Deze methoden zijn toegepast op  $E_8$ .

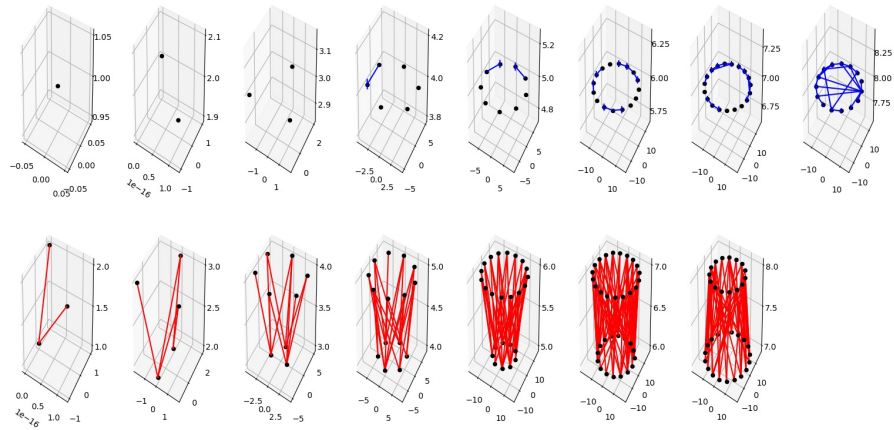
De gevonden wortelsystemen in  $E_8$  zijn de wortelsystemen die gevonden kunnen worden door de twee methodes om nieuwe basissen te vinden uit een basis die in dit verslag besproken zijn. De wortelsystemen zijn alle wortelsystemen in tabellen 2 en 3.

In figuur 6 zijn de resultaten grafisch samengevat. In figuur 7 staan de lagen in figuur 6 gescheiden, wat een overzichtelijker plaatjes geeft.

Voor  $E_8$  heeft Fokko v.d. Bult met een brute-force algoritme alle mogelijke basissen afgegaan en bewezen dat deze twee manieren die besproken zijn er voor zorgt dat je een complete lijst kan krijgen met alle wortelsystemen in  $E_8$ . Dit is alleen nog niet op een directe manier bewezen voor  $E_8$  en ook nog niet voor wortelsystemen van willekeurige rang.



FIGUUR 6. De ringen met punten van onder naar boven zijn de wortelsystemen van rang 1 t/m 8. De blauwe pijlen wijzen van een wortelsysteem naar een wortelsysteem van dezelfde rang toe als je de ene wortelsysteem in het andere wortelsysteem zit. De rode pijlen zitten tussen twee wortelsystemen van rang  $n$  en rang  $n - 1$  als het wortelsysteem van rang  $n - 1$  in het wortelsysteem van rang  $n$  zit.



FIGUUR 7. correspondeert met figuur 6.

## 12. BRONNEN

Humphreys (1972), J.E. (1972). *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory (3e editie)*. New York, United states of America: Springer-Verlag; hst. 9 t/m 11

van Houte, R. (2017-07-05). *Het wortelsysteem van E8: Een model voor elementaire deeltjes?* van <https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid%3A805c99e5-098e-4752-aeb6-424e05e1ce33>

[https://en.wikipedia.org/wiki/Root\\_system](https://en.wikipedia.org/wiki/Root_system)

<https://nl.wikipedia.org/wiki/Kusgetal>

[https://en.wikipedia.org/wiki/Packing\\_problems#Sphere\\_packings\\_in\\_higher\\_dimensions](https://en.wikipedia.org/wiki/Packing_problems#Sphere_packings_in_higher_dimensions)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Sphere\\_packing#Hypersphere\\_packing](https://en.wikipedia.org/wiki/Sphere_packing#Hypersphere_packing)

## 13. APPENDIX A

Alle code is geschreven in Python.

In het eerste gedeelte van de code staan alle basissen.

De eerste functie vindt alle wortels in een wortelsysteem met behulp van de basis en als de dimensie van het wortelsysteem 2D of 3D is, dan wordt er een plaatje gemaakt van het wortelsysteem. De tweede functie vindt de langste wortelsysteem in een wortelsysteem met behulp van alle wortels in het wortelsysteem.

```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```
”groups”
```

"A2"

#lst = [np.array([-1,1,0]),np.array([0,-1,1])]

"A3"

#lst = [np.array([1,-1,0,0]),np.array([0,1,-1,0]),np.array([0,0,1,-1])]

"A4"

#lst = [np.array([1,-1,0,0,0]),np.array([0,1,-1,0,0]),np.array([0,0,1,-1,0]),np.array([0,0,0,1,-1])]

"A5"

#lst = [np.array([1,-1,0,0,0,0]),np.array([0,1,-1,0,0,0]), np.array([0,0,1,-1,0,0]),np.array([0,0,0,1,-1,0]),np.array([0,0,0,0,1,-1])]

"A6"

#lst = [np.array([1,-1,0,0,0,0,0]),np.array([0,1,-1,0,0,0,0]), np.array([0,0,1,-1,0,0,0]),np.array([0,0,0,1,-1,0,0]),np.array([0,0,0,0,1,-1,0]),np.array([0,0,0,0,0,1,-1])]

"A7"

#lst = [np.array([1,-1,0,0,0,0,0,0]),np.array([0,1,-1,0,0,0,0,0]), np.array([0,0,1,-1,0,0,0,0]),np.array([0,0,0,1,-1,0,0,0]),np.array([0,0,0,0,1,-1,0,0]),np.array([0,0,0,0,0,1,-1,0]),np.array([0,0,0,0,0,0,1,-1])]

"A8"

#lst = [np.array([1,-1,0,0,0,0,0,0,0]),np.array([0,1,-1,0,0,0,0,0,0]), np.array([0,0,1,-1,0,0,0,0,0]),np.array([0,0,0,1,-1,0,0,0,0]),np.array([0,0,0,0,1,-1,0,0,0]),np.array([0,0,0,0,0,1,-1,0,0]),np.array([0,0,0,0,0,0,1,-1,0]),np.array([0,0,0,0,0,0,0,1,-1])]

"B2"

#lst = [np.array([1,-1]),np.array([0,2])]

"B3"

#lst = [np.array([1,-1,0]),np.array([0,1,-1]),np.array([0,0,2])]

"C3"

#lst = [np.array([1,-1,0]),np.array([0,1,-1]),np.array([0,0,1])]

"D4"

#lst = [np.array([1,-1,0,0]),np.array([0,1,-1,0]),np.array([0,0,1,-1]),np.array([-1,-1,0,0])]

"D5"

#lst = [np.array([-1,-1,0,0,0]),np.array([1,-1,0,0,0]),np.array([0,1,-1,0,0]),np.array([0,0,1,-1,0]),np.array([0,0,0,1,-1])]

"D6"

#lst = [np.array([-1,-1,0,0,0,0]),np.array([1,-1,0,0,0,0]),np.array([0,1,-1,0,0,0]),np.array([0,0,1,-1,0,0]),np.array([0,0,0,1,-1,0]),np.array([0,0,0,0,1,-1])]

"D7"

#lst = [np.array([-1,-1,0,0,0,0,0]),np.array([1,-1,0,0,0,0,0]),np.array([0,1,-1,0,0,0,0]),np.array([0,0,1,-1,0,0,0]),np.array([0,0,0,1,-1,0,0]),np.array([0,0,0,0,1,-1,0]),np.array([0,0,0,0,0,1,-1])]



"D8"

```
#lst = [np.array([-1,-1,0,0,0,0,0,0]),np.array([1,-1,0,0,0,0,0,0]),np.array([0,1,-1,0,0,0,0,0]),np.array([0,0,1,-1,0,0,0,0]),np.array([0,0,0,1,-1,0,0,0]),np.array([0,0,0,0,1,-1,0,0]),np.array([0,0,0,0,0,1,-1,0]),np.array([0,0,0,0,0,0,1,-1])]

```

"G2"

```
#lst = [np.array([-1,1,0]),np.array([1,-2,1])]

```

"E6"

```
#lst = [np.array([-1,-1,-1,-1,-1,-1,2,2,2]),np.array([0,0,0,3,-3,0,0,0,0]),np.array([0,0,0,0,3,-3,0,0,0]),np.array([0,0,0,0,0,3,-3,0,0]),np.array([0,0,0,0,0,0,3,-3,0]),np.array([0,0,0,0,0,0,0,3,-3])]

```

"E7"

```
#lst = [np.array([-1,-1,-1,-1,-1,-1,2,2,2]), np.array([0,0,3,-3,0,0,0,0,0]),np.array([0,0,0,3,-3,0,0,0,0]),np.array([0,0,0,0,3,-3,0,0,0]),np.array([0,0,0,0,0,3,-3,0,0]),np.array([0,0,0,0,0,0,3,-3,0]),np.array([0,0,0,0,0,0,0,3,-3])]

```

"E8"

```
#lst = [np.array([-1,-1,-1,-1,-1,-1,2,2,2]),np.array([0,3,-3,0,0,0,0,0,0]), np.array([0,0,3,-3,0,0,0,0,0]),np.array([0,0,0,3,-3,0,0,0,0]),np.array([0,0,0,0,3,-3,0,0,0]),np.array([0,0,0,0,0,3,-3,0,0]),np.array([0,0,0,0,0,0,3,-3,0]),np.array([0,0,0,0,0,0,0,3,-3]),np.array([0,0,0,0,0,0,0,0,3,-3])]

```

```
def inpdec(a,b):

```

```
    return float((2*(a.dot(b))))/(b.dot(b))

```

```
def Mirror(x,a):

```

```
    return (x-(2*(x.dot(a)))/(a.dot(a))*a)

```

```
def prroot(lst):

```

```
    lstbase = lst[:]

```

```
    lstnew = lst[:]

```

```
    bound = 1

```

```
    new = True

```

```
    while bound ≤ 100 and lstnew != []:

```

```
        lstold = lstnew[:]

```

```
        lstnew = []

```

```
        bound += 1

```

```
        for i in lstold:

```

```
            for j in lstbase:

```

```
                new = True

```

```
                a = Mirror(i,j)

```

```
                for b in lst:

```

```
                    if (all(a == b)):

```

```
                        new = False

```

```
                        break

```

```
                if new == True:

```

```
                    for b in lstnew:

```

```
                        if (all(a == b)):

```

```
                            new = False

```

```
                            break

```

```
                    if new == True:

```

```
                        lstnew.append(a)

```

```
    lst = lst + lstnew

```

```
print(lst, len(lst))
```

”lijnen tussen punten endichtsbijzijnde, zonder van midden”

```
minlen = 0
tnum = 0
for i in lst:
    for j in lst:
        tnum = (i-j).dot(i-j)
        if tnum != 0:
            if minlen == 0 or tnum < minlen:
                minlen = tnum
if len(lst[0]) == 2:
    fig = plt.figure()
    ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
    ax.hold
    for i in lst:
        ax.scatter(i[0],i[1],c = 'k')
        for j in lst:
            if (i-j).dot(i-j) == minlen:
                ax.plot([j[0],i[0]],[j[1],i[1]],c='r')
elif len(lst[0]) == 3:
    fig = plt.figure()
    ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
    ax.hold
    for i in lst:
        ax.scatter(i[0],i[1],i[2],c = 'k')
        for j in lst:
            if (i-j).dot(i-j) == minlen:
                ax.plot([j[0],i[0]],[j[1],i[1]],[j[2],i[2]],c='r')
```

```
def longroot(rbase):
    posroots = rbase[:]
    added = True
    lstother = posroots[:]
    lstnew = []
    length = posroots[0].dot(posroots[0])
    z = 1
    while added == True:
        z = z + 1
        lstother = lstother + lstnew
        lstnew = []
        added = False
        for i in lstother:
            for j in posroots:
                q = i + j
                if q.dot(q) == length:
                    for k in lstother:
                        if all(q == k):
                            break
                    else:
                        for k in lstnew:
                            if all(q == k):
                                break
```

```
        else:
            lstnew.append(q)
            added = True
    print(lstother[-1])
    for i in posroots:
        print(i, lstother[-1].dot(i))
prroot(lst)
longroot(lst)
```