Versies van Nim

A.C. van Lieshout

Begeleider:
Dr. R.J. Fokkink

TU Delft

Inhoudsopgave

Inleiding

In dit verslag worden verschillende versies van het spel Nim beschreven. Variaties van dit spel werden waarschijnlijk al millennia lang gespeeld, voordat het voor het eerst beschreven werd onder de naam Nim in 1901 door C. L. Bouton[6]. In het originele Nim liggen er meerdere stapels munten op tafel en pakken twee spelers om de beurt munten van een stapel naar keuze tot er geen munten meer over zijn. In dit werk zullen we verder niet op dit spel zelf ingaan.

In hoofdstuk 1 gaan we vooral in op Wythoffs Nim een aanpassing op Nim wat onder andere alleen op twee stapels munten gespeeld kan worden. Deze aanpassing is zoals de naam al suggereert bedacht en opgelost door W. Wythoff[2]. Hiernaast zal er gekeken worden naar Akiyama's Nim, wat een uitbreiding is op Wythoffs Nim voor het spelen met drie stapels. Dit spel werd voorgesteld door S. Akiyama en is nog weinig onderzocht. In het analyseren van deze spellen zal er vooral naar de verliezende posities gekeken worden en in het bijzonder naar de rij van de eerste coördinaten van deze posities. Als hier patronen in te vinden zijn ben je namelijk een stuk sneller bij een oplossing voor het spel.

1

Onpartijdige spellen

1.1. Wat is een onpartijdig spel?

Het onderdeel van speltheorie dat we in dit werk zullen behandelen is onpartijdige combinatorische spellen of afgekort onpartijdige spellen. Bijna geen van de veel gespeelde spellen zoals schaken, dammen et cetera zijn onpartijdige spellen. Dit komt door de vele eisen waar een spel aan moet voldoen om een onpartijdig spel te zijn. De eisen zijn als volgt:

1. Het is een twee speler spel
2. De spelers doen om de beurt een zet
3. Beide spelers hebben perfecte informatie
4. Als een speler geen legale zetten meer kan doen verliest hij het spel
5. Het spel komt altijd tot een einde na een eindig aantal zetten, onafhankelijk van het spel van de spelers
6. Beide spelers hebben toegang tot dezelfde verzameling mogelijke zetten, die bepaald is voor elke situatie in het spel

Voorbeeld: Een voorbeeld van een onpartijdig spel is een wegneemspel zoals "pak een priem". Dit gaat als volgt: er is één stapel met munten, twee spelers nemen om beurten een priem aantal munten van de stapel. Wie als laatste nog een zet kan doen wint het spel.
Voorbeeld: Een voorbeeld van een niet onpartijdig spel is Schaken: het voldoet weliswaar aan eisen 1 t/m 4, maar in Schaken mag een speler niet de stukken van de ander verzetten waardoor hun verzameling mogelijke zetten drastisch verschilt. Schaken voldoet dus niet aan eis 6 en is daardoor niet een onpartijdig spel. Eis 5 is een beetje lastig want hoewel er een regel in schaken is die ervoor zorgt dat het spel eindigt na een eindig aantal zetten, eindigt het spel dan in remise. Wij zijn alleen geïnteresseerd in win/verlies spellen.

1.2. P-posities

Voordat we onpartijdige spellen kunnen oplossen moeten wat definities introduceren om de spellen handig te kunnen beschrijven.

Definitie 1.1. Laat $A \subset \mathbb{N}$ dan is $mex(A)$ gelijk aan het kleinste element van het complement van A. Oftewel $mex(A) = min\{n : n \in \mathbb{N}, n \not\in A\}$. Dit heet de *minimal excluded value*.

Wiskundig worden dit soort spellen weergeven door een gerichte graaf.

Definitie 1.2. Een gerichte graaf $G = (X, F)$ is een verzameling knopen X waarvan sommige zijn verbonden met pijlen, genaamd zijden F.

Definitie 1.3. $X(G)$ is de verzameling van alle knopen van G, $F(x)$ met $x \in X(G)$ is de verzameling van alle zijden die van uit het punt x vertrekken.

Elk combinatorisch spel kan worden gezien als een gerichte graaf. Elke knoop is dan een positie waar het spel zich in kan bevinden en elke zijde tussen twee posities geeft aan dat je de ene positie naar de andere kunt verzetten.

Om een spel op te lossen moet voor elke positie duidelijk zijn wat de winnende strategie is. Dit kunnen we doen door aan te geven of een positie een positie is waaruit je kunt winnen of dat het een positie is waarvandaan je altijd verliest. In de speltheorie noemen we deze posities P en N posities.

Definitie 1.4. Een P-positie is een positie waar de speler die niet aan de beurt is wint en N-posities zijn posities waar de speler die aan de beurt is wint.

De P staat voor *previous* wat wil zeggen dat de vorige speler wint en dat de speler die vanuit deze positie een zet moet doen dus verliest. De N staat voor *next* wat wil zeggen dat de speler die vanuit deze positie een zet moet doen wint (vanuit het spel dus de volgende speler). Wel moeten we weten dat er geen posities over zijn in het spel die noch P noch N-posities zijn. Om dit te bewijzen gebruiken we de eisen waar een onpartijdig spel aan moet voldoen, beschreven in de vorige paragraaf.

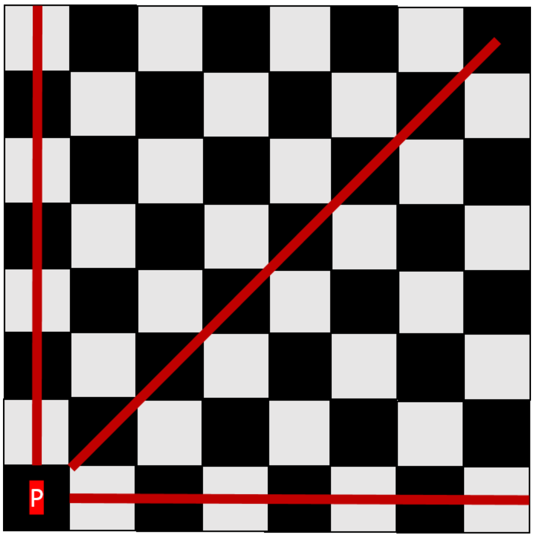
Stelling 1.1. *Elk combinatorisch spel is ofwel gewonnen voor de speler die aan zet is, ofwel de speler die niet aan zet is.*

Bewijs. We representeren een spel met een gerichte graaf. We gaan nu de knopen van de graaf "kleuren", dat wil zeggen, we geven ze een label. In dit geval hebben we twee kleuren: N en P. Posities zonder mogelijke volgende zet zijn verloren voor de speler die aan zet is, vanwege eis 4. Deze knopen geven we label P. Alle posities die een zet hebben naar een P-positie geven we label N. Nu komt de gedachtenstap: er is een knoop die nog geen label heeft en die alleen zetten heeft naar knopen met label N. Hier gebruiken we eis 5: het spel is eindig. Met andere woorden, elk pad is eindig. Stel dat er voor alle resterende knopen een zet is naar een ongelabelde knoop. Dan is elk pad binnen de ongelabelde knopen uit te breiden met nog een zet naar een ongelabelde knoop. In het bijzonder is er dan een oneindig pad, dit is in tegenspraak met eis 5. Dus zijn er knopen met alleen zetten naar N posities (een zet naar een P positie kan immers niet, anders was de knoop gelabeld). Deze posities zijn duidelijk verliezend voor de speler die aan zet is en geven we label P. Herhaal nu het proces. Alle knopen met zetten naar P posities geven we label N, enzovoorts. □

In principe geeft dit bewijs een algoritme om onpartijdige spellen op te lossen maar, grafen van combinatorische spellen zijn enorm. Voor bijvoorbeeld Schaken is het aantal posities groter dan het aantal atomen in het heelal. Dat past niet in een computer, dus zullen we vaak iets anders moeten bedenken.

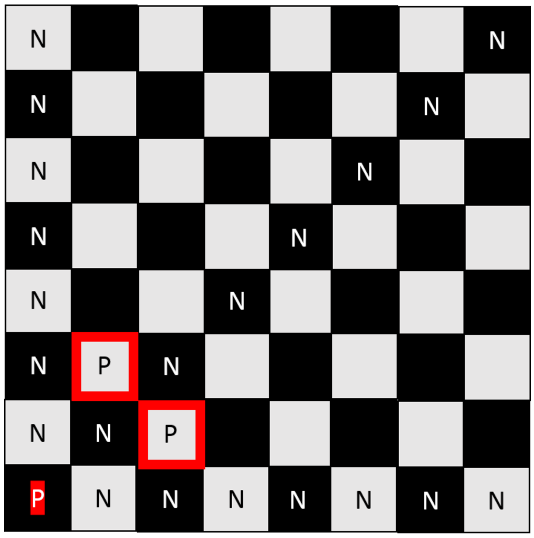
1.3. P-posities van Corner-the-Lady

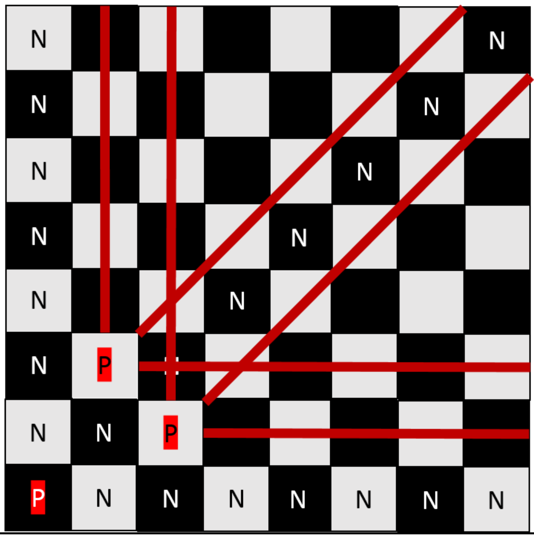
Gelukkig kunnen we ook spellen bedenken die makkelijk in een duidelijke graaf weer te geven zijn. Het spel waarvan we in dit voorbeeld de P-posities gaan bepalen is: Corner-the-Lady. Dit wordt gespeeld op een schaakbord met alleen een koningin. De koningin mag in dit spel alleen naar onderen, naar links of naar linksonder bewogen worden en als de koningin niet meer verzet kan worden op jouw beurt verlies je het spel.



Stap 1: Uit de regels van het spel weten we dat de positie helemaal links onder een P-positie is, het is namelijk de enige positie waarvan de koningin niet meer verzet kan worden. Alle posities waarvan de koningin de P-positie kan bereiken zijn N-posities.

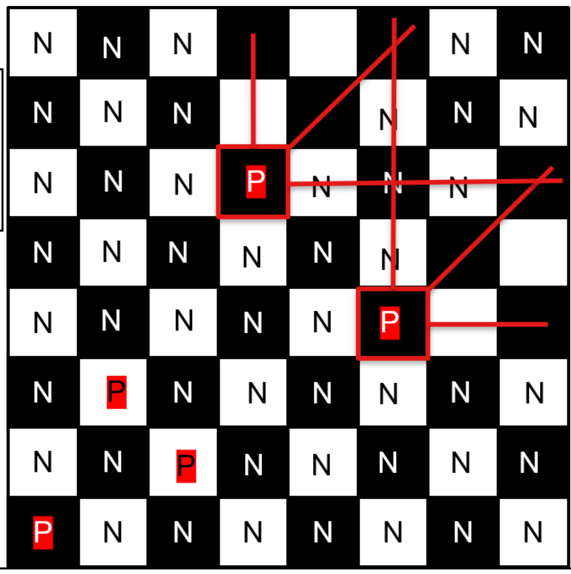
Stap 2: Nu we alle bekende N-posities hebben ingevuld vinden we twee posities die alleen N-posities kunnen bereiken, dus moet de speler vanuit deze plaatsen de koningin op een N-positie zetten en dus de volgende speler laten winnen. Dit zijn dus de volgende P-posities.

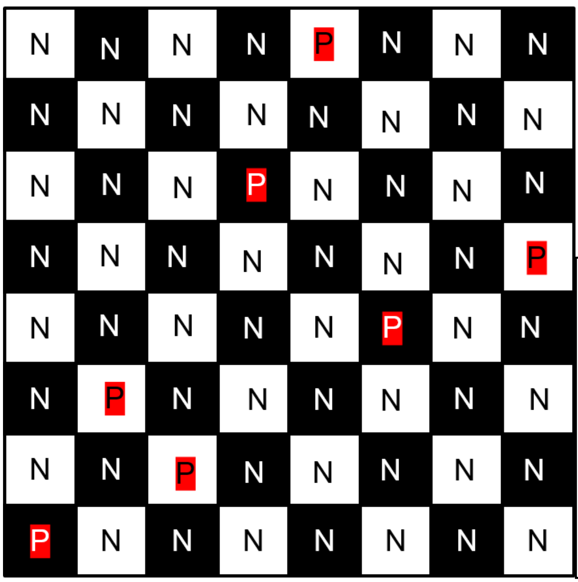




Stap 3: Nu kunnen we weer nieuwe N-posities aanwijzen, namelijk alle posities die de nieuwe P-positie kunnen bereiken. Vanuit die posities kan de speler die aan de beurt is de koningin immers op een P-positie zetten waardoor de volgende speler geen keus heeft en de koningin op een eerder gevonden N-positie neer moet zetten.

Stap 4: We vinden uiteraard weer nieuwe P-posities, waarmee we ook weer nieuwe N-posities kunnen aanwijzen, volgends methodes hierboven besproken.



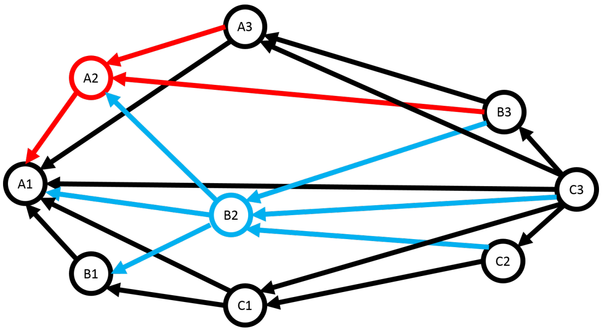


Stap 5: Deze stappen herhalen we tot alle posities op het schaakbord een letter hebben gekregen. We vinden nog 2 P-posities en de rest van het schaakbord zijn N-posities. De P-posities lijken nu op twee lijnen te liggen en als je het spel op een kwart-oneindig schaakbord zou spelen vind je ook een verband; deze wordt verderop in dit hoofdstuk besproken.

En hiermee hebben we het spel voor een 8 × 8-bord opgelost, want we weten vanaf elke positie wat we moeten doen om te winnen. Namelijk de koningin naar een P positie plaatsen.

1.4. Sprague Grundy Waarden

Voor de linkerbenedenhoek van het schaakbord krijg je de volgende gerichte graaf:

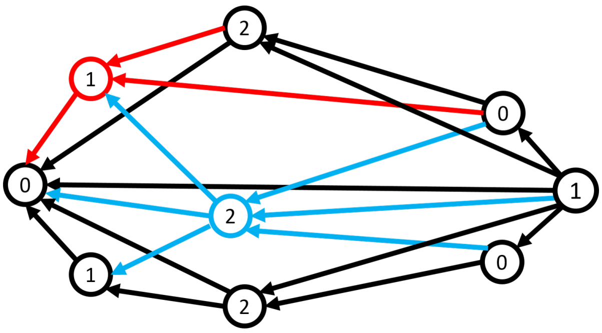


Figuur 1.1: De linker onderhoek (3 × 3) voor het spel Corner-the-Lady uitgebeeld in een gerichte graaf.

Deze weergave van een spel maakt het mogelijk om de Sprague-Grandy (SG) waarden te vinden. Bij SG waarden label je de graaf met oneindig veel kleuren: 0, 1, 2, 3, ..., de zogenaamde *mex* waarden (zie ook Definitie 1.1). Dit is algemener dan alleen N en P zoals we voorheen deden, maar ook veel moeilijker. Zo bestaat er voor Corner-the-Lady een gesloten formule voor N en P posities, maar is er geen goed algoritme bekend om de *mex* waarden te berekenen. SG waarden worden aan elke positie van het spel gegeven om meer over die positie en het spel te weten te komen en definiëren we als volgt:

Definitie 1.5. De Sprague-Grundy functie van een gerichte graaf, (X, F), is een functie, g, gedefinieerd op X en neemt niet-negatieve gehele waarden aan, zodat $g(x) = \text{mex}\{g(y) \text{ voor } y \in F(x)\}$ [1].

Deze definitie is recursief omdat je de waarden van alle bereikbare posities moet weten om de waarde van een positie te bepalen. Gelukkig weten we door eis 5 (elk spel is eindig), dat er geen cykels in de graaf zitten en er altijd minstens 1 positie is waarvandaan geen zetten mogelijk zijn, en dus dat de recursie niet stopt. Als we de SG functie toepassen op de graaf die we eerder hebben gemaakt krijgen we het volgende:



Figuur 1.2: De linker onderhoek (3 × 3) voor het spel Corner-the-Lady met alle Sprague-Grundy waarden voor de posities.

Alle posities met Sprague-Grundy waarde 0 zijn P-posities, dit is gemakkelijk te bewijzen want duidelijk is dat de positie waarin het spel eindigt een Sprague-Grundy waarde van 0 heeft, er kan immers niet vanuit deze positie een andere bereikt worden. Hier is de *mex* dus 0. De volgende positie die Sprague-Grundy waarde 0 krijgt kan dus niet deze positie bereiken en is dus geen N-positie. Hieruit volgt dus dat als een positie Sprague-Grundy waarde 0 heeft het geen enkele P-positie kan bereiken en dus zelf een P-positie is.

1.5. Wythoffs Nim

In deze paragraaf zullen we kijken naar Wythoffs Nim. Dit spel is een uitbreiding van het simpelste wegneemspel Nim. In Nim zijn er een aantal stapels munten. Als je aan de beurt ben mag je zoveel munten weghalen van één van de stapels als je wilt.

Wythoffs Nim is een spel dat we stiekem al kennen het is namelijk equivalent aan het spel dat we hiervoor hebben opgelost: Corner-the-Lady. Wythoffs Nim wordt gespeeld met slechts twee stapels munten en de legale zetten zijn: van één van de stapels een aantal munten pakken (dit mag de volledige stapel zijn), of van beide stapels evenveel munten te pakken (je kunt ook beide stapels volledig pakken). Hierbij gelden ook de regels van onpartijdige spellen. Wie de laatste munt pakt wint en twee spelers spelen om beurten. Wythoffs Nim is equivalent aan het vorige spel als je de stapels als posities op het schaakbord ziet en de zetten ziet als het verzetten van de koningin: van de eerste stapel pakken is hetzelfde als de koningin naar links verzetten, van de tweede stapel pakken is hetzelfde als de koningin naar beneden verzetten en van beide stapels een gelijk aantal pakken is hetzelfde als de koningin diagonaal naar linksonder verzetten. Dit spel is opgelost zoals de naam al zegt door Wythoff[2]. Met opgelost wordt bedoeld dat hij een manier heeft gevonden om alle P-posities te vinden.

Om over Wythoffs Nim te praten definiëren we de volgende verzamelingen: P_n, G_n en D_n. De P-posities van Wythoffs Nim $P_n = (a_n, b_n) : n \in \mathbb{N} \wedge a_n \leq b_n$ geordend op de a_n. Omdat de P-posities symmetrisch zijn (als (q,r) een P-positie is, is (r,q) dat ook) missen we niets door alleen P-posities te bekijken met $a_n \leq b_n$. $G_n = \{a_i : i < n\} \cup \{b_i : i < n\}$ waar alle getallen in zitten die al een keer in een P-positie zijn voor gekomen. En als laatste $D_n = \{d : d = b_i - a_i, i < n\}$ waar alle verschillen in zitten die al een keer voorgekomen zijn.

Lemma 1.1.
1) *Als* $m \neq n$ *dan* $a_m \neq a_n$
2) *Als* $m \neq n$ *dan* $b_m - a_m \neq b_n - a_n$

Bewijs.
1) Neem $m \neq n$ zodat $a_m = a_n$, als $b_m > b_n$ dan kan P_m naar P_n gezet worden door b_m te verlagen naar b_n en als $b_m < b_n$ dan kan het andersom. Ook geldt er $b_m \neq b_n$ want anders $P_m = P_n$, dus deze m en n bestaan niet.
2) Neem $m > n$ zodat $b_m - a_m = b_n - a_n$ en $a_m > a_n$, maar dan kan P_m naar P_n gezet worden door zowel a_m als b_m te verlagen met het zelfde aantal naar a_n en b_n respectievelijk. Dus deze m en n bestaan niet.

□

Gevolg: Hieruit volgt dat voor alle n a_n en b_n getallen zijn die nog niet zijn voorgekomen. Oftewel $a_n, b_n \not\in G_n$. Voor het verschil tussen beide coördinaten kunnen we iets soortgelijks zeggen namelijk: voor alle n geldt $b_n - a_n \not\in D_n$.

Lemma 1.2.
1) $\bigcup_{n\geq 0}(G_n) = \mathbb{N}$
2) $D_n = \{0, 1, 2, .., n-1\}$

Bewijs.
1) Stel $\bigcup_{n\geq 0}(G_n) \neq \mathbb{N}$. Duidelijk is dat $\bigcup_{n\geq 0}(G_n) \subset \mathbb{N}$, dus moet gelden $\mathbb{N} \not\subset \bigcup_{n\geq 0}(G_n)$. Hieruit volgt dat minstens één $m \in \mathbb{N}$ niet in G_n zit voor alle n. Neem g de kleinste van deze m. Dit betekent dat alle posities met een g erin naar P-posities gezet kunnen worden. Omdat g veranderd moet worden moet er voor elke positie (x, g) een P-positie bestaan (x, y) of (y, x) met $y < g$ of (p, q) met $p < x$, $q < g$ en $p - q = g - x$. Door het gevolg van Lemma 1.1 weten we dat elk getal en elk verschil maar 1 keer voorkomt in de verzameling van P-posities en dat de a_n altijd groter moeten worden. Er is dus een $N \in \mathbb{N}$ zodat voor alle $n > N$, $a_n > g$ en maar een eindig aantal P-posities waar (x, g) heen kan. Hoewel er oneindig veel posities in de vorm (x, g) zijn. Dit is een tegenspraak waardoor $\bigcup_{n\geq 0}(G_n) = \mathbb{N}$ moet gelden.
2)
i) Het klopt voor $n = 0$ want P_0 is $(0, 0)$.
ii) Neem aan dat het klopt tot en met $n - 1$.
iii) Stel dat (a_n, b_n) niet verschil n heeft. Beschouw $(a_n, a_n + n)$. Dit is dan een N-positie en heeft dus een zet naar (a_k, b_k) met $k < n$. Dit kan niet een zet zijn waarbij van beide stapels evenveel wordt gepakt, want $b_k - a_k = k$ (door de aanname bij ii) en dat is kleiner dan n. Dus verandert de zet het 1e of 2e coördinaat niet. Nu moet het 1e coördinaat veranderd worden, want a_n komt niet voor bij de eerste $k < n$ posities, dat hebben we zojuist bewezen. Dus moet de 1e coördinaat worden vermindert en het 2e coördinaat hetzelfde blijven, maar dan gaat het verschil omhoog. Dat kan niet, want de verschillen van de eerste $n - 1$ P-posities zijn $\{0, 1, .., n - 1\}$ en dat is een tegenspraak. Dus geldt volgens het principe van volledige inductie en i, ii en iii, $D_n = \{0, 1, 2, .., n - 1\}$ voor alle n. □

Dit bewijs toont aan dat (a_n, b_n) van de vorm $(a_n, a_n + n)$ is.

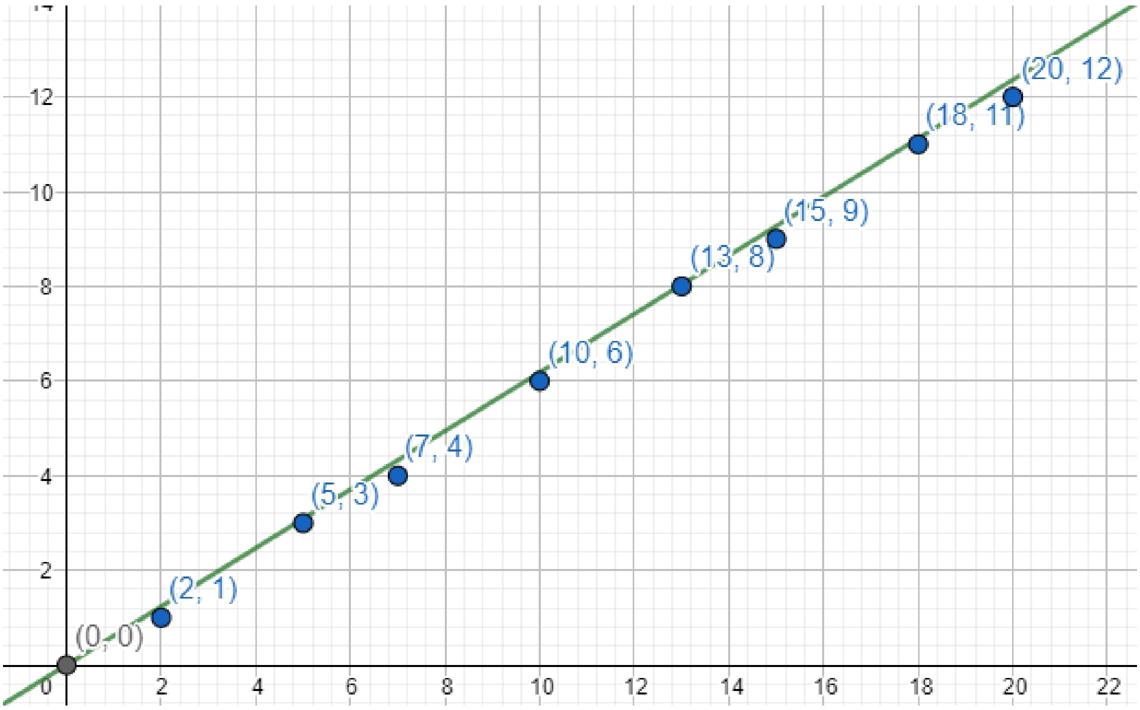
Lemma 1.3. *Als $G_n = \{a_i : i < n\} \cup \{b_i : i < n\}$ en $D_n = \{d : d = b_i - a_i, i < n\}$ dan worden alle P-posities $P_n = \{(a_n, b_n) : n \in \mathbb{N} \wedge a_n \leq b_n\}$ geordend op de a_n gegenereerd door $a_n = mex(G_n)$ en $b_n = a_n + n$*

Bewijs. We bewijzen dit met inductie:
1) $P_0 = (mex(\emptyset), mex(\emptyset) + 0) = (0, 0)$ Klopt.
2) Stel de formule klopt voor n, dus $P_n = (mex(G_n), mex(G_n) + n)$.
3) Nu moeten we bewijzen dat $P_{n+1} = (mex(G_n), mex(G_n) + n + 1)$. We bewijzen eerst $a_{n+1} = mex(G_n)$. Duidelijk is dat $a_{n+1} \geq mex(G_n)$ vanwege het gevolg van Lemma 1.1. Als $a_{n+1} > mex(G_n)$ dan moet wel gelden dat $b_{n+1} = mex(G_n)$ vanwege Lemma 1.2 (1). Maar dat is duidelijk onzin, want dan zou a_{n+1} kleiner zijn dan $mex(G_n)$. Dus $a_{n+1} = mex(G_n)$. Vervolgens moet je bewijzen dat $b_{n+1} = mex(G_n) + n + 1$. En dat hebben we al bewezen in lemma 1.2 (2) dus moet $b_{n+1} \geq mex(G_n) + n + 1$. Volgens 1, 2 en 3 en volledige inductie geldt het nu voor alle n. □

Op deze manier maken we het volgende rijenpaar:

1	3	4	6	8	9	11	12	...
2	5	7	10	13	15	18	20	...

Op het schaakbord zagen we al dat de P-posities op een soort lijn lagen en Wythoff heeft inderdaad een bijzondere relatie gevonden tussen de P-posities, de P-posities bleken een verband te hebben met de gulden snede: $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



Figuur 1.3: De P-posities van Wythoffs Nim met de lijn $y = \frac{1}{\phi}x$.

Stelling 1.2. *voor $k \in \mathbb{N}_0$ en $\lfloor x \rfloor$ gelijk aan het grootste gehele getal onder of gelijk aan x is $(\lfloor \frac{1}{2}k(1+\sqrt{5}) \rfloor, \lfloor \frac{1}{2}k(3+\sqrt{5}) \rfloor)$ de P-positie P_k. Als we vervolgens k opeenvolgend vergroten vinden we alle P-posities (zonder verlies van algemeenheid wordt aangenomen dat de eerste stapel kleiner of gelijk aan de tweede stapel is).*

Wythoff[2] bewijst dit als volgt:

Bewijs. Omdat het verschil tussen $(\lfloor\frac{1}{2}k(1+\sqrt{5})\rfloor$ en $\lfloor\frac{1}{2}\text{k}(3+\sqrt{5})\rfloor)$ gelijk is aan k is het duidelijk dat de verschillen tussen de stapels hetzelfde zijn als in de lijst gegenereerd door het algoritme uit lemma 1.3. Voldoende is nu om te bewijzen dat dit nieuwe algoritme elk willekeurig geheel getal precies 1 keer gegenereerd. Als het dat doet kan het namelijk alleen maar dezelfde rij zijn omdat het stijgt en zoals gezegd ook dezelfde verschillen heeft. Neem $n \in \mathbb{N}_0$ willekeurig en laat α en β de kleinste waardes die bij n moeten worden opgeteld om veelvouden van ϕ en $1+\phi$ respectievelijk te krijgen. Dan hebben we $\alpha = 0.5p(1+\sqrt{5}) - n$ en $\beta = 0.5q(3+\sqrt{5}) - n$ met p en q gehele getallen. Verder $0 < \alpha < 0.5(1+\sqrt{5})$ en $0 < \beta < 0.5(3+\sqrt{5})$ door de rode vergelijking te vermenigvuldigen met $0.5(-1+\sqrt{5})$ en de blauwe vergelijking te vermenigvuldigen met $0.5(3-\sqrt{5})$ en daarna bij elkaar op te tellen krijg je: $0.5\alpha(-1+\sqrt{5}) + 0.5\beta(3-\sqrt{5}) = p+q-n$ wat een geheel getal is. Door hetzelfde trucje toe te passen op de groene en paarse ongelijkheid krijgen we: $0 < 0.5\alpha(-1+\sqrt{5}) + 0.5\beta(3-\sqrt{5}) < 2$ Dus moet $p+q-n = 1$ en $0.5\alpha(-1+\sqrt{5}) + 0.5\beta(3-\sqrt{5}) = 1$ een oplossing voor deze vergelijking is $\alpha = \beta = 1$ maar dit kan niet want $n+1$ is een geheel getal en dus geen veelvoud van ϕ (want ϕ is irrationaal). Dus moet gelden dat of $\alpha < 1, \beta > 1$ of $\alpha > 1, \beta < 1$ in het eerste geval vinden we $n = \lfloor 0.5p(1+\sqrt{5}) - 1\rfloor$ en dat kan niet geschreven worden in de vorm $n = \lfloor 0.5k(3+\sqrt{5})\rfloor$ en omgekeerd in het tweede geval $\lfloor n = 0.5q(3+\sqrt{5})\rfloor$ en weer kan dat niet worden geschreven in de vorm $n = \lfloor 0.5k(1+\sqrt{5})\rfloor$ dus komt n slechts voor in 1 van de rijen. □

De twee rijen centraal in het bewijs $\lfloor k\phi\rfloor$ en $\lfloor k\phi\rfloor + k$ vormen samen de orginele Wythoffrij die als bijzondere eigenschap heeft dat de rijen samen heel $\mathbb{N}_0$ opspannen en complementair zijn.

1.6. Generalisaties van de Wythoffrij

In de Wythoffrij is stapgrootte een interessant gegeven. Met stap bedoelen we het verschil tussen de opeenvolgende getallen op dezelfde rij. Dat is interessant want elke keer dat de stap op de $\lfloor k\phi\rfloor$ rij, vanaf nu A-rij, een stap van 2 is betekend het dat het een getal overslaat wat dus op de $\lfloor k\phi\rfloor + k$ rij, vanaf nu B-rij, voorkomt. Daar gaan we een stelling over bewijzen en we bekijken overeen komende rijen.

Stelling 1.3. [3] $\{(\lfloor n\phi\rfloor\}_{n\geq 1}$ *oftewel de A-rij van de Wythoffrij voldoet aan de volgende eigenschappen:*

(1) $1 \leq \lfloor n\phi\rfloor - \lfloor (n-1)\phi\rfloor \leq 2$

(2) $|\lfloor n_1\phi\rfloor - \lfloor n_2\phi\rfloor - (n_1-n_2)\phi| < 1$

(3) *als* $\lfloor n\phi\rfloor - \lfloor (n-1)\phi\rfloor = 1$ *dan* $\lfloor (n+1)\phi\rfloor - \lfloor n\phi\rfloor = \lfloor (n-1)\phi\rfloor - \lfloor (n-2)\phi\rfloor = 2$

(4) *als* $\lfloor n\phi\rfloor - \lfloor (n-1)\phi\rfloor = \lfloor (n-1)\phi\rfloor - \lfloor (n-2)\phi\rfloor = 2$, *dan* $\lfloor (n+1)\phi\rfloor - \lfloor n\phi\rfloor = \lfloor (n-2)\phi\rfloor - \lfloor (n-3)\phi\rfloor = 1$

Bewijs. **(1)** Door de mex definitie van de A-rij weten we $A_n - A_{n-1} \geq 1$ wat zegt $\lfloor n\phi\rfloor - \lfloor (n-1)\phi\rfloor \geq 1$. Daarnaast geldt dat elk getal dat niet in de A-rij zit in de B-rij moet zitten. De B-rij heeft geen opeenvolgende getallen, want $\lfloor k\phi\rfloor + k > \lfloor (k-1)\phi\rfloor + (k-1) + 1$. Dus kan er maar 1 getal tussen zitten, wat betekend dat het verschil tussen twee A-rij getallen maximaal 2 kan zijn; $\lfloor n\phi\rfloor - \lfloor (n-1)\phi\rfloor \leq 2$

(2) Neem m_1, m_2 en r_1, r_2 zodat $n_1\phi{=}m_1 + r_1$ en $n_2\phi{=}m_2 + r_2$ met m_1, m_2 gehele getallen en $0 < r_1, r_2 < 1$. Door het naar beneden af te ronden verwijder je r. Dus $|\lfloor n_1\phi\rfloor - \lfloor n_2\phi\rfloor - (n_1-n_2)\phi| = |m_1 - m_2 - m_1 + m_2 - r_1 + r_2| = |r_2 - r_1| \leq max r_1, r_2 < 1$

(3) Neem aan $\lfloor n\phi\rfloor - \lfloor (n-1)\phi\rfloor = 1$. We weten dat $\phi \approx 1.618$ en $\lfloor n\phi\rfloor - \lfloor (n-2)\phi\rfloor > n\phi - (n-2)\phi - 1 = 2\phi - 1 > 2.1$ en omdat $\lfloor n\phi\rfloor - \lfloor (n-2)\phi\rfloor$ een geheel getal is moet het 3 of hoger zijn. dus moet $\lfloor (n+1)\phi\rfloor - \lfloor n\phi\rfloor = \lfloor (n-1)\phi\rfloor - \lfloor (n-2)\phi\rfloor = 2$, omdat het verschil niet hoger mag zijn dan 2 volgens (1) en dus niet 1 mag zijn door dat het bij elkaar 3 of meer moet zijn en $\lfloor n\phi\rfloor - \lfloor (n-1)\phi\rfloor = 1$.

(4) Overeenkomend moet $\lfloor n\phi\rfloor - \lfloor (n-3)\phi\rfloor < n\phi - (n-3)\phi + 1 = 3\phi + 1 < 5.9$ dus $\lfloor n\phi\rfloor - \lfloor (n-3)\phi\rfloor$ is hoogstens 5 dus als $\lfloor n\phi\rfloor - \lfloor (n-1)\phi\rfloor = \lfloor (n-1)\phi\rfloor - \lfloor (n-2)\phi\rfloor = 2$ dan moeten de stappen aan beide kanten wel 1 zijn om onder de 5 te blijven.

□

Deze mooie relaties tussen de stappen doet afvragen of vergelijkbare rijen hetzelfde doen. Het rijenpaar dat we als eerst bekijken is: We pakken voor a_n weer de mex van alle voorgekomen getallen, maar voor b_n pakken we in plaats van $b_n = a_n + n$ nu $b_n = a_n + n + 1$, dus je begint weer bij 1 maar neemt daarna 3 om het paar compleet te maken en vervolgens is 2 het eerst volgende getal dat nog niet is geweest enzovoorts. Dan krijg je de versprongen Wythoffrij:

1	2	4	6	7	9	10	...
3	5	8	11	13	16	18	...

Dit rijenpaar A_n, B_n is $\{A_n = mex(\{A_i : i < n\} \cup \{B_i : i < n\}\}_{n\geq 1}$ en $\{B_n = A_n + n + 1\}_{n\geq 1}$. Dit is dus bijna hetzelfde als de Wythoffrij alleen slaan we het verschil 1 over. De A-rij lijkt op $\lfloor (n+1)\phi \rfloor - 2$ en de B-rij op $\lfloor (n+1)\phi \rfloor - 2 + n + 1$, maar de vraag is nu of we dit ook kunnen bewijzen.
Vermoeden: deze pseudo Wythoffrij wordt gegeven door de formule: $(\lfloor (n+1)\phi \rfloor - 2, \lfloor (n+1)\phi \rfloor - 2 + n + 1)_{n\geq 1}$. We weten al dat deze rij elk natuurlijk getal minstens 1 keer tegenkomt door het gebruik van de mex, als de rij $(\lfloor (n+1)\phi \rfloor - 2, \lfloor (n+1)\phi \rfloor - 2 + n + 1)_{n\geq 1}$ dat ook doet zijn de rijen gelijk want de verschillen tussen de A en B-rij kloppen al. We weten al dat de originele Wythoffrij alle getallen langs komt dus de -2 zorgt er niet voor dat er getallen worden overgeslagen, het enige probleem kan liggen bij de n+1. Maar dat gaat ook goed want door n+1 in plaats van n te nemen slaan we (1,2) over en dat coördinaat zou in deze rij (-1,0) zijn dus hebben we geen natuurlijke getallen overgeslagen en klopt ons vermoeden dus. Of nog meer veranderde Wythoffrijen dezelfde eigenschappen hebben wordt onderzocht in het volgende hoofdstuk waar we de Lieshoutrij tegen zullen komen, wat ook een veranderde Wythoffrij is.

1.7. De Wythoffrij en het Fibonacciwoord

De Wythoffrij en de rij van Fibonacci hebben allebei te maken de gulden snede. We gaan nu nog een andere connectie laten zien die we kunnen gebruiken in hoofdstuk 3.

Definitie 1.6. Fibonacciwoord is de oneindige rij van letters die je krijgt door te beginnen met alleen een a en dan oneindig vaak de volgende operatie uit te voeren op elke volgende rij die je krijgt. $\chi : a \to ab, b \to a$

Dus voor de eerste iteraties krijg je:

$$a \tag{1.1}$$
$$ab \tag{1.2}$$
$$aba \tag{1.3}$$
$$abaab \tag{1.4}$$
$$abaababa \tag{1.5}$$
$$abaababaabaab \tag{1.6}$$
$$abaababaabaababaababa \tag{1.7}$$
$$enz. \tag{1.8}$$

Er zijn hieruit al wat belangrijke eigenschappen te redeneren. Zo kunnen er nooit twee b's naast elkaar staan, want elke b moet na een a komen omdat elke b is geïntroduceerd in het paar ab. Verder weten we nu ook dat er nooit 3 a's naast elkaar staan, immers om aaa te krijgen moet de eerste a wel een beeld van b zijn en de tweede a ook. Dus is aaa het beeld van bb(a) en dat kan niet voorkomen. Verder kan je van elke a ook beredeneren of het een beeld is van een a of van een b, als er namelijk een b na de a komt komt het van een a en als er een a na komt van een b. In het volgende lemma maken we de connectie met de Wythoffrij. Daarvoor nemen we de rij a_n met a de index van de n-de a in het Fibonacciwoord en voor b_n hetzelfde maar dan voor b. dan krijg je $(a_n)_{n\geq 1} = 1, 3, 4, 6, 8, 9, ...$ en $(b_n)_{b\geq 1} = 2, 5, 7, 10, 13, 15, ...$

Lemma 1.4. [4] *voor alle n ≥ 1 geldt dat het Fibonacciwoord het enige woord is in een binair alfabet met*

$$a_n = mex(a_i, b_i : 0 \leq i \leq n) \text{ en } b_n = a_n + n$$

Bewijs. De n-de a maakt door χ de n-de b in het Fibonacciwoord, omdat alle b's worden verkregen door a's in het iteratie proces. Alle overige gaten worden gevuld met a's. Omdat a's dus niet als extra letters erbij komen maar alleen op de gaten komen weten we dat de volgende a op de eerste nog niet ingevulde plaats komt. Inmiddels moet dit bekend voorkomen als de mex, dus dat gaan we bewijzen. Stel we hebben $a_n = mex(a_i, b_i : 0 \leq i \leq n)$ voor alle $i < n$ We bewijzen nu $a_n = mex(a_i, b_i)$. Duidelijk is dat a_n ongelijk is aan alle a_i en b_i met $i < n$. Dus in ieder geval $a_n \geq mex\{a_i, b_i : i < n\}$. Als $a_n > mex\{a_i, b_i : i < n\}$ dan moet er een op deze plaats en $b_n = mex\{a_i, b_i : i < n\}$, we hebben immers maar 2 keuzes voor elke plaats. Omdat er nooit twee b's na elkaar staan, hebben we $a_{n-1} = mex\{a_i, b_i : i < n\} - 1$. Maar dat kan niet want dan $b_{n-1} > a_{n-1} + 1 = mex\{a_i, b_i : i < n\} = b_n$. Voor a_1 geldt het ook dus door volledige inductie moet voor alle n

nu gelden $a_n = mex\{a_i, b_i : i < n\}$.
Dan bewijzen we weer met volledige inductie het gehele lemma nu:
(1) Omdat het Fibonacciwoord begint met ab geldt voor n=1 $b_1 = a_1 + 1$
(2) Neem aan dat $b_n = a_n + n$ voor een $n \geq 2$
(3) Te bewijzen: $b_{n+1} = a_{n+1} + n + 1$. Als $a_{n+1} - a_n = 1$ en omdat b_n, b_{n+1} respectievelijk komen van a_n en a_{n+1}. krijg je omdat a_n en a_{n+1} naast elkaar staan onder χ abab en dus krijg je $b_{n+1} - b_n = 2$, anderzijds als je $a_{n+1} - a_n = 2$ staat er dus een b tussen de a's die een a wordt en dus krijg je 2 a's tussen de b's en dus $b_{n+1} - b_n = 3$ en dus geldt altijd dat $b_{n+1} - b_n - (a_{n+1} - a_n) = 1$ wat vereenvoudigd naar $b_{n+1} = 1 + b_n - a_n + a_{n+1}$ en door onze aanname bij (2) om te schrijven naar $b_n - a_n = n$ krijgen we $b_{n+1} = a_{n+1} + n + 1$
door (1),(2) en (3) en volledige inductie geld voor alle $n \geq 1$ dat $b_n = a_n + n$ □

Stelling 1.4. *Voor het Fibonacciwoord geldt:*
(1) er zijn maar 2 mogelijke aantallen a's op een interval van een bepaalde lengte
(2) er zijn slechts $x + 1$ deelwoorden te vinden in het Fibonacciwoord met x =de lengte van het deelwoord

Bewijs. (1) Neem een willekeurig interval i wat niet aan het begin zit. Voor i+1 geldt dat het 1 meer a heeft (je vervangt een b voor een a) of 1 minder (je vervangt een a voor een b) of hetzelfde (a voor een a of b voor een b) Voor i+2 geldt hetzelfde, behalve dat het niet meer dan 1 kan verschillen met i immers kunnen voor en achter aan het woord niet 2b's staan en voor i+3 geld weer hetzelfde, je kan immers niet bab ruilen voor aaa aangezien er nooit 3 a's naast elkaar staan. Dit kan je doortrekken over elk interval.
(2) Proof in [5] □

Door lemma 1.4 kunnen we het Fibonacciwoord gebruiken om de Wythoffrij te analyseren. Immers alles wat voor het Fibonacciwoord geldt geldt ook voor de rij van eerste coördinaten. Dit is handig want het Fibonacciwoord is uitvoerig geanalyseerd en er zijn allerlei bijzonderheden van bekend, zoals Stelling 1.4. Die we nu dus ook kunnen gebruiken voor de analyse van de A-rij.
Nu de basis van de speltheorie is uitgelegd en we de Wythoffrij hebben geanalyseerd kunnen we door naar andere spellen. Met de theorie uit dit hoofdstuk zou ook voor het in het begin genoemde spel "pak de priem' de P-posities gevonden kunnen worden. Stel we spelen dit spel op een stapel van 250 munten wil jij dan beginnen of moet ik beginnen?

Referenties

[1] T.S. Ferguson, Game Theory (2014) Part I, https://www.math.ucla.edu/ tom/Game_Theory/comb.pdf
[2] W. Wythoff, A modification of the game of Nim, Nieuw archief voor wiskunde **2**, 199(1907)
[3] X. Sun en D. Zeilberger, On Fraenkel's N-Heap Wythoffs Conjectures, Annals of Combinatorics **8** (2004) 225-238
[4] E. Duchêne1 and M. Rigo1, A morphic approach to combinatorial games: the Tribonacci case, RAIRO-Theor. Inf. Appl. 42 (2) 375-393 (2008)
[5] A. Luca, A division property of the Fibonacci word, Information Processing Letters Volume 54, Issue 6, 23 June 1995, Pages 307-312 [6] Bouton, C. L. (1901–1902), "Nim, a game with a complete mathematical theory", Annals of Mathematics, 2, 3 (1/4): 35–39, doi:10.2307/1967631, JSTOR 1967631

2

Algemene Wythoffrijen

2.1. Inleiding en definities

In het vorige hoofdstuk hebben we al gezien dat er meer rijen zijn die zich als de originele Wythoffrij gedragen. We noemen dit soort rijen gegeneraliseerde Wythoffrijen of in het kort Wythoffrijen. Een gegeneraliseerde Wythoffrij of Wythoffrij verschilt van het origineel omdat de rij "ruis" mag hebben in het begin van de rij, dat wil zeggen dat er in het begin van de rij eindig veel getallen overgeslagen mogen worden zolang de rij uiteindelijk opeenvolgende verschillen heeft. We gebruiken voor de posities in deze rijen hoofdletters in dit hoofdstuk. Net gedefinieerd door Sun en Zeilberger wordt de definitie dan:

Definitie 2.1. Wythoffrij: Een rij van paren gehele getallen $\{(A_n, B_n)\}_{n \geq n_0 \geq 1}$ heet een *Wythoffrij* als er een eindige verzameling T bestaat zodat $A_n = \text{mex}(\{A_i, B_i : n_0 \leq i < n\} \cup T)$, $B_n = A_n + n$ en $B_n \cap T \neq \emptyset$

De versprongen Wythoffrij onderzocht in het eerste hoofdstuk had een T die leeg is en $n_0 = 2$. Deze rij kon net als de orignele Wythoffrij net beschreven worden met de gulden snede. Als een Wythoffrij deze eigenschap heeft noemen we de rij een speciale Wythoffrij. In de definitie is dat zo:

Definitie 2.2. Speciale Wythoffrij: Een rij van paren gehele getallen $\{(A_n, B_n)\}_{n \geq n_0 \geq 1}$ heet een *speciale Wythoffrij* als het een Wythoffrij is en er bestaan gehele getallen N en α zodat als $n > N$ dan $A_n = \lfloor n\phi \rfloor + \alpha + \varepsilon_n$ met $\varepsilon_n \in \{0, \pm 1\}$

Voorbeeld: merk op dat de originele Wythoffrij een speciale Wythoffrij is met $n_0 = 1, N = 0, \alpha = 0$ en $\varepsilon_n \equiv 0$ en de versprongen wythoffrij ook maar dan met $n_0 = 2, N = 0, \alpha = -2$ en $\varepsilon_n \equiv 0$

2.2. De Lieshoutrij

In deze paragraaf bekijken we een voorbeeld om te illustreren hoe (speciale) Wythoffrijen in elkaar zitten. Het voorbeeld dat we bekijken heeft als parameters $n_0 = 3$ en T is leeg. Dit wil zeggen dat alle natuurlijke getallen als A of B voorkomen, want T is leeg en A_n is altijd de mex van alle getallen die al voor zijn gekomen. Verder is $n_0 = 3$, dus het eerste verschil en de eerste index van de rij is 3. We weten niet zeker of dit een speciale Wythoffrij is, maar het heeft wel bijzondere eigenschappen en zal voor de rest van deze paragraaf de Lieshoutrij genoemd worden. Deze rij ziet er dus als volgt uit:

1	2	3	5	7	9	10	12	13	15	16	...
4	6	8	11	14	17	19	22	24	27	29	...

Je ziet dat de bovenste rij telkens het laagste getal neem dat nog niet is voorgekomen en dat het verschil tussen boven en onder oploopt met 1 vanaf 3. Als we de rij vergelijken met de originele Wythoffrij die er als volgt uit zag:

1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	...
2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	...

Lijkt het erop dat het verschil tussen de rijen altijd (0,2) of (1,-1) is. Meer precies, als (A_n, B_n) de Wythoffrij is en (C_n, D_n) de Lieshoutrij dan lijkt het erop dat $(C_n, D_n) - (A_n, B_n) = (0,2)$ of $(1,-1)$. Als we in plaats van de Lieshoutrij met de orignele Wythoffrij te vergelijken kijken naar het verschil tussen $(A_{(n+2)}, B_{(n+2)}) - (4,4)$ en de Lieshoutrij zien we dat er op veel plaatsen geen verschil meer is en op slechts sommige plaatsen er een verschil van (1,1) of (-1,-1) overblijft. Dus we beginnen (A_n, B_n) bij (4,7) en we trekken overal 4 vanaf, dan krijg je:

$A_n - 4$	0	2	4	5	7	8	10	12	13	15	17	...
$B_n - 4$	3	6	9	11	14	16	19	22	24	27	30	...

Op de rode plekken scheelt deze rij met (1,1) of (-1,-1) van de Lieshoutrij en er lijkt een patroon in te zitten. De verschillen van $\pm(1,1)$ komen namelijk voor op n=1, 3, 6, 11, 19, ... en deze rij kan worden gemaakt uit de Fibonaccirij F_n via $F_2, F_2 + F_3, F_2 + F_3 + F_4, F_2 + F_3 + F_4 + F_5$, enz. Hier over stellen we een vermoeden op:

Vermoeden.

De Lieshoutrij is een speciale Wythoffrij met $\alpha = -4$ en op $n = 1, 3, 6, 11, 19, 32, 53, \ldots$ is ε_n alternerend $+1$ en -1 en op alle andere n geldt $\varepsilon_n = 0$

De rij van uitzonderingen is de rij van Fibonacci F_n alleen dan twee naar rechts opgeschoven en van alle getallen is twee afgetrokken, dus $F_{(n+2)} - 2$. Dit is hetzelfde als een rij beginnend met 1 waarbij telkens een volgend Fibonaccigetal bij op wordt geteld om het volgende getal te krijgen. Dus $F_2, F_2 + F_3, F_2 + F_3 + F_4, F_2 + F_3 + F_4 + F_5$, enz.

Dit vermoeden geldt in elk geval voor de eerste 20.000 posities, maar omdat de Lieshout niet snel wordt gegeneerd hebben we niet verder kunnen checken. Als we een rij willen maken die wel gelijk is aan de originele Wythoffrij, met alleen twee translaties, dan moeten we bestuderen waarom de Lieshoutrij de afwijkingen heeft. De afwijking van de rij lijkt voort te komen uit het feit dat als er een verschuiving van 2 wordt gedaan op de originele Wythoffrij en er 4 van elk element wordt gehaald het met een 0 begint. Aangezien elke Algemene Wythoffrij geen 0 bevat kan dit niet een Algemene Wythoffrij zijn. Voor een rij met $n_0 = 3$ heb je altijd een verschuiving van 2 naar rechts nodig dus het zou beter zijn om slechts 3 van de elementen af te halen zodat het gewoon met een 1 begint, maar dat wordt dan niet de Lieshoutrij. Dus moeten we de rij veranderen door de T te veranderen. Er is immers geen andere parameter die we kunnen veranderen. Dus opnieuw de originele Wythoffrij ziet er als volgt uit:

1	3	4	6	8	9	11	12	...
2	5	7	10	13	15	18	20	...

De verschuiving van 2 en dit keer 3 van elk element afhalen geeft het volgende rijenpaar:

-2	0	1	3	5	6	8	9	...
-1	2	4	7	10	12	15	17	...

Deze begint bij (1,4) zoals we willen. Nu moet 2 in de T gezet worden omdat 2 niet meer gaat voorkomen in de verschuiving, het staat immers achter de streep en elk getal komt maar 1 keer voor zoals bewezen in hoofdstuk 1. Door 2 in de T toe te voegen is dit geen probleem meer en hebben we de n_0 en T gevonden voor de speciale Wythoffrij die ontstaat door de originele te transleren met (2,-3), merk hierbij op dat het aftrekken van 3 geen invloed heeft op de mex functie die de rij opstelt waardoor de rij ook later niet kan afwijken van de originele Wythoffrij.
Hierdoor hebben we nu ook een soort algoritme gemaakt om voor elke n_0 een T te kunnen kiezen zodat de rij precies de originele Wythoffrij is met een verschuiving en een aftrekking. Namelijk:

Stelling 2.1. ***Algoritme:*** *voor een Wythoffrij met n_0 geld dat diens A-rij gelijk is aan $\lfloor(n+n_0-1)\phi\rfloor - \lfloor n_0\phi\rfloor - 1$ als T gelijk is aan alle positieve over geslagen getallen.*

Bewijs. We hadden al geconstateerd dat de mex niet verandert onder optelling (als een getal het laagst is en overal wordt 2 afgehaald dan blijft dat het laagste getal.) Doordat alle overgeslagen getallen in de T zitten, worden ze nu ook overgeslagen en is de rij hetzelfde □

2.3. Stelling van Sun en Zeilberger

Alle lemma's en stellingen in deze paragraaf komen uit het artikel[1]. Hiermee werken we toe naar een grote stelling op het eind over Wythoffrijen.

Lemma 2.1. *Gegeven een Wythoffrij $\{(A_n, B_n)\}_{n\geq n_0}$ en $N \geq n_0$ zodat $A_n > max(T)$ voor alle $n \geq N$ dan:*

(1) $1 \leq A_{n+1} - A_n \leq 2$

(2) $2 \leq B_{n+1} - B_n \leq 3$

(3) *als $A_n > B_N$ dan $A_{n+2} - A_n \geq 3$*

Bewijs. **(1)** Door de definitie $A_n - A_{n-1} \geq 1$. Daarnaast geldt $\{A_i\}_{i\geq n_0} \cup \{B_i\}_{i\geq n_0} = \mathbb{N} - T$ en $A_n > \max(T)$ dus de enige getallen tussen A_n en A_{n+1} zitten in $\{B_i\}_{i\geq n_0}$, en die rij heeft geen opeenvolgende getallen, dus kan er slechts 1 nummer tussen zitten dus $A_{n+1} - A_n \leq 2$.

(2) Door de definitie

$$B_n - B_{n-1} = A_n + n - A_{n-1} - (n-1) \geq 2$$

en door (1)

$$B_n - B_{n-1} = A_n + n - A_{n-1} - (n-1) = A_n - A_{n+1} + 1 \leq 3$$

(3) Stel $A_{n+2} - A_n = 2$, neem dan $B_m = \min\{B_i : B_i > A_{n+2}\}$, dan geldt $m > N$, $B_{m-1} < A_n$ dus $B_m - B_{m-1} > 3$, want A_n, A_{n+1} en A_{n+2} zitten er tussen. Dit is in tegenspraak met (2) dus moet (3) gelden. □

Lemma 2.2. *Gegeven een Wythoffrij $\{(A_n, B_n)\}_{n\geq n_0}$ en een $N \geq n_0$ zodat $A_n > max(T)$ voor alle $n \geq N$, als we A_n en B_n schrijven als: $A_n = \lfloor n\phi\rfloor + \alpha_n$ en $B_n = A_n + n$, dan $-1 \leq \alpha_{n+1} - \alpha_n \leq 1$ voor alle $n \geq N$*

Bewijs.

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = (A_{n+1} - A_n) - (\lfloor n\phi\rfloor - \lfloor(n-1)\phi\rfloor)$$

volgens lemma 2.1 (1) en stelling 1.3 (1):

$$1 \leq A_{n+1} - A_n \leq 2 \ en\ 1 \leq \lfloor n\phi\rfloor - \lfloor(n-1)\phi\rfloor \leq 2$$

dus $-1 \leq \alpha_{n+1} - \alpha_n \leq 1$ □

Gevolg: In de volgende stellingen zetten we α vast en worden alle aanpassingen gedaan met ε_n. Uit dit lemma kunnen we concluderen dat twee opeenvolgende ε hooguit 1 schelen.

Lemma 2.3. *Gegeven een Wythoffrij $\{(A_n, B_n)\}_{n\geq n_0}$, neem aan dat er gehele getallen N, α en $m_2 > m_1 > n+2$ bestaan zodat:*

- $A_n > max(T)$ *als* $n > N$
- $A_{m_2} > B_{m_1}$
- $A_n = \lfloor n\phi\rfloor + \alpha + \varepsilon_n$, *met* $m_1 - 2 \leq n \leq m_2$ *en* $-1 \leq \varepsilon_n \leq 1$
- $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = 0$ *mits* $m_1 - 2 \leq n \leq m_2$

Als deze bestaan dan $|\varepsilon| \leq 1$

Bewijs. Stel er is een $n > m_2$ zodat $|\varepsilon_n| > 1$, laat q de kleinste van zulke n zijn, dan $|\varepsilon_q| = 2$ door het gevolg van Lemma 2.2. Ook geldt $A_q \leq A_{q-1} + 2$ Dan zijn er dus 4 gevallen die we afzonderlijk beschouwen:

a) $A_q = A_{q-1} + 2$ en $\varepsilon_q = -2$

b) $A_q = A_{q-1} + 1$ en $\varepsilon_q = -2$

c) $A_q = A_{q-1} + 1$ en $\varepsilon_q = 2$

d) $A_q = A_{q-1} + 2$ en $\varepsilon_q = 2$

Merk ook gelijk op dat ε_{q-1} vastligt, want die scheelt hooguit 1 met ε_q. Door het gevolg van Lemma 2.2 en $|\varepsilon_{q-1}| \leq 1$ door de keuze van q.

a) $A_q = A_{q-1} + 2$ en $\varepsilon_q = -2 : \varepsilon_{q-1} = -1$ Uit stelling 1.3 weten we $\lfloor q\phi \rfloor - \lfloor (q-1)\phi \rfloor \leq 2$ dit vormen we om naar: $\lfloor q\phi \rfloor + \alpha - 2 \leq \lfloor (q-1)\phi \rfloor + \alpha$ merk op dat de linkerkant van de ongelijkheid gelijk is aan A_q, maar $A_q = A_{q-1} + 2 = \lfloor (q-1)\phi \rfloor + \alpha + 1$ dit is niet kleiner of gelijk aan $\lfloor (q-1)\phi \rfloor + \alpha$ en dus is dit geval uitgesloten.

b) $A_q = A_{q-1} + 1$ en $\varepsilon_q = -2 : \varepsilon_{q-1} = -1$ Lemma 2.1.(1) zegt dat $A_{q-1} - A_{q-2}$ =1 of 2 omdat $A_q - A_{q-1} = 1$ moet het wel 2 zijn.

$$2 = A_{q-1} - A_{q-2} = \lfloor (q-1)\phi \rfloor + \varepsilon_{q-1} - \lfloor (q-2)\phi \rfloor - \varepsilon_{q-2} \rightarrow 3 = \lfloor (q-1)\phi \rfloor - \lfloor (q-2)\phi \rfloor - \varepsilon_{q-2}$$

dus $\varepsilon_{q-2} = -1$ (stelling 1.3.(1) en de keuze van ε_q). Door stelling 1.3.(4) weten we nu ook dat $\lfloor (q-2)\phi \rfloor - \lfloor (q-3)\phi \rfloor = 1$, immers geldt $\lfloor q\phi \rfloor - \lfloor (q-1)\phi \rfloor = \lfloor (q-1)\phi \rfloor - \lfloor (q-2)\phi \rfloor = 2$. Maar door Lemma 2.1.(1)

$$1 \geq A_{q-2} - A_{q-3} = \lfloor (q-2)\phi \rfloor - \lfloor (q-3)\phi \rfloor + \varepsilon_{q-2} - \varepsilon_{q-3}$$

net als eerst moet $\varepsilon_{q-3} = -1$ maar dat is een derde opeenvolgende niet nul epsilon en dat kan niet volgens onze aanname dus is deze optie ook uitgesloten.

c) $A_q = A_{q-1} + 1$ en $\varepsilon_q = 2 : \varepsilon_{q-1} = 1$

$$1 = A_q - A_{q-1} = \lfloor q\phi \rfloor + \alpha + \varepsilon_q - (\lfloor (q-1)\phi \rfloor + \alpha + \varepsilon_{q-1}) = \lfloor q\phi \rfloor - \lfloor (q-1)\phi \rfloor + 1$$

dus $\lfloor q\phi \rfloor - \lfloor (q-1)\phi \rfloor = 0$ dit kan niet en dus is dit geval ook uitgesloten.

d) $A_q = A_{q-1} + 2$ en $\varepsilon_q = 2 : \varepsilon_{q-1} = 1$ doordat

$$\lfloor q\phi \rfloor - \lfloor (q-1)\phi \rfloor = A_q - A_{q-1} - (\varepsilon_q - \varepsilon_{q-1}) = 2 - 1 = 1$$

kan stelling 1.3.(3) gebruikt worden die geeft dat

$$\lfloor (n+1)\phi \rfloor - \lfloor n\phi \rfloor = \lfloor (n-1)\phi \rfloor - \lfloor (n-2)\phi \rfloor = 2$$

en dus $\lfloor q\phi \rfloor + 2 = \lfloor (q+1)\phi \rfloor$. Dus is er een gat tussen A_q en A_{q-1} waar een B_m zit, dus er is een $m < q$ zodat $B_m = A_q - 1 = A_{q-1} + 1$ dit geeft

$$\lfloor m\phi \rfloor + m + \varepsilon_m = B_m - \alpha = A_q - \alpha - 1 = \lfloor q\phi \rfloor + 1$$

nu hebben we voor ε_m nog maar 1 optie over: het moet gelijk zijn aan 0. (omdat m kleiner is dan q en q het kleinste nummer is met een $\varepsilon = \pm 2$ kan het niet 2 of -2 zijn. Alles hoger dan 2 of lager dan -2 is uitgesloten door lemma 2.2 en tot slot kan het niet 1 of -1 zijn want dan krijg je respectievelijk $\lfloor m\phi \rfloor + m + 1 = \lfloor q\phi \rfloor + 1$ en $\lfloor m\phi \rfloor + m + \varepsilon_m = \lfloor q\phi \rfloor + 2 = \lfloor (q+1)\phi \rfloor$ en die kunnen niet omdat $\{\lfloor n\phi \rfloor + n\}$ en $\{\lfloor n\phi \rfloor\}$ complementair zijn (zie hoofdstuk 1) en dus $\lfloor m\phi \rfloor + m = \lfloor q\phi \rfloor + 1$. Met de zelfde methode vinden we ook:

$$\lfloor (m-1)\phi \rfloor + m - 1 = \lfloor (q-1)\phi \rfloor - 1 = \lfloor q\phi \rfloor - 2 = \lfloor m\phi \rfloor + m - 3$$

dus weten we de stap tussen m en $(m-1)$ namelijk $\lfloor m\phi \rfloor = \lfloor (m-1)\phi \rfloor + 2$. Omdat

$$2 \geq A_{n-1} - A_{n-2} = \lfloor (q-1)\phi \rfloor + \alpha + \varepsilon_{q-1} - (\lfloor (q-2)\phi \rfloor + \alpha + \varepsilon_{q-2}) = 2 + 1 - \varepsilon_{q-2}$$

dus moet $\varepsilon_{q-2} = 1$. Door onze laatste aanname: $\varepsilon_{i-2}\varepsilon_{i-1}\varepsilon_i = 0$ mits $m_1 - 2 \leq i \leq m_2$ weten we $\varepsilon_{q-3} = 0$ de epsilons van q-1 en q waren immers beide niet nul. Nu $B_{m-1} - \alpha = A_{n-1} - 1 - \alpha$ (definitie van A_n en B_n) wat neerkomt op $\lfloor (m-1)\phi \rfloor + m - 1 + \varepsilon_{m-1} = \lfloor (q-1)\phi \rfloor + 1 - 1$ Dus $\varepsilon_{m-1} \neq 0$ want $\{\lfloor n\phi \rfloor + n\}$ en $\{\lfloor n\phi \rfloor\}$ zijn complementair, daarnaast ε_{m-1} mag ook niet -1 zijn want $\lfloor q\phi \rfloor = \lfloor (q-1)\phi \rfloor + 1$ en weer dezelfde complementaire rijen. Dus moet $\varepsilon_{m-1} = 1$
Nu moet er bewezen worden dat $\varepsilon_{m-2} = -1$ zodat het in tegenspraak is met Lemma 2.3. We bekijken $A_{q-2} - A_{q-3}$ Dit kan 1 of 2 zijn door Lemma 2.1.(1). Mocht $A_{q-2} - A_{q-3} = 1$ gelden. Dan krijg je

$$1 = A_{q-2} - \alpha - (A_{q-3} - \alpha) = \lfloor (q-2)\phi \rfloor - \lfloor (q-3)\phi \rfloor + \varepsilon_{q-2} - \varepsilon_{q-3} = \lfloor (q-2)\phi \rfloor - \lfloor (q-3)\phi \rfloor + 1 - 0$$

Dit betekent dat $\lfloor (q-2)\phi \rfloor - \lfloor (q-3)\phi \rfloor = 0$ dit kan niet, dus moet $A_{q-2} - A_{q-3} = 2$ We weten $B_{m-2} = A_{q-2} - 1$, wat betekent dat

$$\lfloor (m-2)\phi \rfloor + (m-2) + \alpha + \varepsilon_{m-2} = \lfloor (q-2)\phi \rfloor + \alpha + \varepsilon_{m-2} - 1$$

hieruit volgt $\lfloor (m-2)\phi \rfloor + (m-2) + \varepsilon_{m-2} = \lfloor (q-2)\phi \rfloor$ hieruit weten we dat $\varepsilon_{m-2} \neq 0$ weer omdat $\{\lfloor n\phi \rfloor + n\}$ en $\{\lfloor n\phi \rfloor\}$ complementair zijn. Daarnaast volgt uit $A_{q-2} - A_{q-3} = 2$ dat $\lfloor (q-2)\phi \rfloor - \lfloor (q-3)\phi \rfloor = 1$. Dit leidt tot

$$\lfloor (m-2)\phi \rfloor + (m-2) + \varepsilon_{m-2} = \lfloor (q-2)\phi \rfloor = 1 + \lfloor (q-3)\phi \rfloor$$

dus $\varepsilon_{m-2} \neq 1$ weer door de complemetairheid van dezelfde rijen. Nu is er maar 1 optie over $\varepsilon_{m-2} = -1$ maar dat is in tegenspraak met Lemma 2.3, want $\varepsilon_{m-1} = 1$ (verschil in epsilon mag hooguit 1 zijn.) Dus deze optie is ook uitgesloten.
Met alle gevallen uitgesloten kan er maar 1 conclusie getrokken worden: $\varepsilon_n \in \{0, \pm 1\}$ $\forall n > m_2$

□

Stelling 2.2. Sun en Zeilberger *Gegeven een Wythoffrij $\{(A_n, B_n)\}_{n \geq n_0}$, neem aan dat er gehele getallen N, α en $m_2 > m_1 > n+2$ bestaan zodat:*

- $A_n > max(T)$ *als* $n > N$
- $A_{m_2} > B_{m_1}$
- $A_n = \lfloor n\phi \rfloor + \alpha + \varepsilon_n$, *met* $m_1 - 2 \leq n \leq m_2$ *en* $-1 \leq \varepsilon_n \leq 1$
- $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = 0$ *mits* $m_1 - 2 \leq n \leq m_2$

Als deze bestaan dan $\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = 0$ voor alle $n > m_2$, oftewel ver genoeg in een speciale Wythoffrij geldt $\varepsilon = 0$ en als dat niet zo is is de vorige ε en de volgende dat wel.

Bewijs. In Lemma 2.3 hebben we al bewezen dat:$-1 \leq \varepsilon_n \leq 1$ als $n > m_2$.
Nu moet nog bewezen worden dat $\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = 0$ voor alle $n > m_2$. We nemen aan dat er een n bestaat zodat $n > m_2$, $\varepsilon_n\varepsilon_{n-1} \neq 0$ neem q de kleinste van deze n. We weten door het gevolg van lemma 2.2 en door lemma 2.3 dat $\varepsilon_q = \varepsilon_{q-1} = \pm 1$ en dus weten we door de aanname dat er geen 3 epsilon na elkaar ongelijk aan nul zijn dat: $\varepsilon_{q-2} = 0$ Er zijn nu twee gevallen:

i) $\varepsilon_q = \varepsilon_{q-1} = 1$:

$$2 \geq A_{q-1} - A_{q-2} = \lfloor (q-1)\phi \rfloor + \varepsilon_{q-1} - \lfloor (q-2)\phi \rfloor - \varepsilon_{q-2} = \lfloor (q-1)\phi \rfloor - \lfloor (q-2)\phi \rfloor + 1$$

dus $\lfloor (q-1)\phi \rfloor - \lfloor (q-2)\phi \rfloor = 1$ en $A_{q-1} - A_{q-2} = 2$. Door stelling 1.3.(3) weten we $A_q - A_{q-1} = \lfloor q\phi \rfloor - \lfloor (q-1)\phi \rfloor = 2$. Er bestaat $m < q$ zodat $B_m = A_q - 1$ en $B_{m-1} = A_{q-1} - 1$ waaruit volgt dat $\lfloor m\phi \rfloor + m + \varepsilon_m = \lfloor q\phi \rfloor$ en $\lfloor (m-1)\phi \rfloor + m - 1 + \varepsilon_{m-1} = \lfloor (q-1)\phi \rfloor$, omdat $\{\lfloor n\phi \rfloor\}_{n\geq 1}$ en $\{n + \lfloor n\phi \rfloor\}_{n \geq 1}$ complementair zijn $\varepsilon_m \neq 0$ en $\varepsilon_{m-1} \neq 0$. Ook geldt $\varepsilon_{m-1} \neq 1$ want $\lfloor (m-1)\phi \rfloor + m - 1 + \varepsilon_{m-1} = \lfloor (q-2)\phi \rfloor + 1$ (als $\varepsilon_{m-1} = 1$ krijg $B_{m-1} = A_{n-2}$ dus $\varepsilon_{m-1} = -1$ en daardoor $\varepsilon_m = -1$ (Gevolg van lemma 2.2)).
Maar aangezien $m < q$ is dit in tegenspraak met onze keuze van q, dus dit geval is uitgesloten.

ii)$\varepsilon_q = \varepsilon_{q-1} = -1$:

$$1 \leq A_{q-1} - A_{q-2} = \lfloor (q-1)\phi \rfloor + \varepsilon_{q-1} - \lfloor (q-2)\phi \rfloor - \varepsilon_{q-2} = \lfloor (q-1)\phi \rfloor - \lfloor (q-2)\phi \rfloor - 1$$

dus $\lfloor (q-1)\phi \rfloor - \lfloor (q-2)\phi \rfloor = 2$ en $A_{q-1} - A_{q-2} = 1$ Door Lemma 2.1.(3): $A_q - A_{q-1} = A_{q-2} - A_{q-3} = 2$ en $\lfloor q\phi \rfloor - \lfloor (q-1)\phi \rfloor = A_q - A_{q-1} = 2$. Dus door stelling 1.3.(4)

$$\lfloor (q+1)\phi \rfloor - \lfloor q\phi \rfloor = \lfloor (q-2)\phi \rfloor - \lfloor (q-3)\phi \rfloor = 1$$

Er bestaat $m < q$ zodat $B_m = A_q - 1$ en $B_{m-1} = A_{q-2} - 1$ waaruit volgt dat $\lfloor m\phi \rfloor + m + \varepsilon_m = \lfloor q\phi \rfloor - 2$ en

$$\lfloor (m-1)\phi \rfloor + m - 1 + \varepsilon_{m-1} = \lfloor (q-2)\phi \rfloor - 1 = \lfloor (q-3)\phi \rfloor$$

omdat $\{\lfloor n\phi \rfloor\}_{n\geq 1}$ en $\{n + \lfloor n\phi \rfloor\}_{n\geq 1}$ complementair zijn kan $\varepsilon_{m-1} \neq 0, -1$ dus moet $\varepsilon_{m-1} = 1$ en omdat $\varepsilon_m \neq 0$ is $\varepsilon_m = 1$ volgens het gevolg van lemma 2.2. Maar aangezien $m < q$ is dit in tegenspraak met onze keuze van q, dus dit geval is uitgesloten.
Met beide gevallen uitgesloten kan er maar 1 conclusie worden getrokken: $\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = 0$ voor alle $n > m_2$ □

2.4. Discussie

Met deze stelling bewezen weten we dat zeer specifieke Wythoffrijen altijd stabiliseren, dat wil zeggen dat vanaf een bepaalt moment ver genoeg in de rij het verschil met de gulde snede nagenoeg constant blijft met slechts kleine afwijkingen. In feite is de stelling een uitbereiding van Lemma 2.2 alleen is nu de α niet afhankelijk van n maar constant. Maar het werkt dus alleen als $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = 0$ mits $m_1 - 2 \le n \le m_2$ geldt. Dat is vaak net zo lastig om te bewijzen als de conclusie van de stelling. Wel bleek deze bijzondere stelling handig in het oplossen van een ander spel die wordt behandeld in het artikel hieronder genoemd. Helaas brengt deze stelling ons niet dichterbij het bewijzen van het hierboven genoemde vermoeden omdat daar dan eerst bewezen moet worden dat in die rij $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = 0$ mits $m_1 - 2 \le n \le m_2$ geldt.

Referenties

[1] X. Sun en D. Zeilberger, On Fraenkel's N-Heap Wythoffs Conjectures, Annals of Combinatorics **8** (2004) 225-238

3

Akiyama's Nim

3.1. Eigenschappen van de P posities

In dit hoofdstuk bekijken we een spel op drie stapels dat is gedefinieerd door Akiyama. Dit spel blijkt veel moeilijker te analyseren te zijn dan Wythoffs Nim. Daarom heeft dit hoofdstuk een experimenteel karakter, dit wil zeggen dat we denken dat sommige uitspraken waar zijn, maar dat we deze uitspraken niet kunnen bewijzen, deze uitspraken zullen als aannames genoemd worden. Alle aannames in dit hoofdstuk worden wel ondersteund door onze numerieke resultaten. Het spel wordt gespeeld met drie stapels munten en zoals inmiddels gewoon wint de persoon die de laatste munt pakt. Een zet is legaal als je óf van een stapel niks pakt en van de andere twee stapels zoveel je wilt óf van twee stapels hetzelfde aantal en van de derde stapel pakt hoeveel je wilt, je mag uiteraard nooit niks pakken of munten terug leggen. In meer wiskundige termen wordt dat: Een zet is legaal als $x \cdot y \cdot z(x-y)(x-z)(y-z) = 0$ en $\max(x, y, z) > 0$ met x, y en z het aantal gepakte munten van respectievelijk de 1e, 2e en 3e stapel. Om alle P-posities te vinden gebruiken we het algoritme dat we op het schaakbord hebben toegepast in hoofdstuk 1. Om dit voor je te zien kan je een verlicht 3d schaakbord voorstellen waar de koningin in beweegt en er een schaduw van de koningin op drie zijvlakken valt die grenzen aan de linkeronderhoek (0,0,0). Een zet is nu legaal als op 1 van de zijvlakken de schaduw van de koningin een legale zet maakt. Op de andere zijvlakken hoeft het nu niet een legale zet te zijn maar moet de schaduw koningin wel dichterbij de linkeronderhoek komen. We weten dat (0,0,0) de eerste P-positie is en dus weten we dat alle posities die hier naar toe kunnen bewegen N-posities zijn. Dat zijn in dit geval alle posities waarbij op een zijvlak een zet naar de linkeronderhoek legaal is. De posities waarvandaan alleen dit soort posities kunnen worden bereikt zijn de nieuwe P-posities. Omdat alle posities symmetrisch zijn: als (a,b,c) een P-positie is dan zijn (a,c,b), (b,c,a), enz. dat ook en hetzelfde geld voor N posities, bekijken we vanaf nu alleen de posities met 1e coördinaat ≤ 2e coördinaat ≤ 3e coördinaat. Welke we lexicografisch ordenen.

Definitie 3.1. Volgens **Lexicografische ordening** is $(a, b, c) < (a', b', c')$ als en slechts als $a < a$', of als $a = a'$ dan $b < b'$, of als $a = a'$ en $b = b'$ dan $c < c'$

Door de P posities zo te ordenen kunnen we namen aan de P posities geven met P_0=(0,0,0) en $P_n = (a_n, b_n, c_n)$

Lemma 3.1. *Elke zet in Akiyama's Nim is strikt dalend in de lexicografische ordening en zelfs geldt dat als er een zet is van (a, b, c) naar (a', b', c') dan is $a' \leq a$, $b' \leq b$, $c' \leq c$*

Bewijs. Duidelijk is dat als geldt: als er een zet is van (a, b, c) naar (a', b', c') dan is $a' \leq a$, $b' \leq b$, $c' \leq c$. Dat dan elke zet in Akiyama's Nim dalend is in de lexicografische ordening.
Verder geldt dat er minstens 1 munt is weggehaald en dat voor (a', b', c') geldt dat $a' \leq b' \leq c'$ Dus geldt er dat $a' \leq a$ er is immers geen munt bij gekomen op de laagste stapel dus a is minstens even hoog als laagste coördinaat a'. Voor b' geldt $b' \leq b$ of $b' = a$ en aangezien $a \leq b$ geldt er $b' \leq b$. Voor b' geldt $c' \leq c$ of $c' = a$ of b en aangezien $a \leq c$ en $b \leq c$ geldt er $c' \leq c$ □

Lemma 3.2. P_1*=(1,2,3)*

Bewijs. Merk op dat een positie (0,x,y) met (x,y) ongelijk aan (0,0) een N-positie is. Ook is (x,y,y) een N-positie. Om te bewijzen dat P_1=(1,2,3) moeten we bewijzen dat (1,2,3) niet naar (0,0,0) gezet kan worden en niet naar posities waarvan we niet weten of het N of P posities zijn. Maak nu een legale zet vanuit (1,2,3) naar (1-x,2-y,3-z). Deze positie kan duidelijk niet (0,0,0) zijn. Als x=1 ontstaat er hoe dan ook een N positie (0,2-y,3-z), dat zelfde geldt als y=2 of z=3. Dan blijft het geval over x=0, y<2,z<3 en we hebben (1,2-y,3-z) waarbij de coördinaten alleen de waarden 1,2 of 3 kunnen aannemen en zodra twee waarden gelijk zijn is het een N-positie. Dus als het een P-positie zou zijn moeten alle drie de waardes ongelijk zijn. Dit kan alleen (1,2,3) zijn, maar dat mag niet want dan zou x=y=z=0. Dat zijn alle gevallen en dus geldt P_1=(1,2,3) □

Daarmee weten we nu ook dat geen enkele andere P_n een coördinaat heeft gelijk aan 1, 2 of 3, immers of hun andere coördinaten zijn groot genoeg om naar P_1 te zetten of ze zijn kleiner en kunnen dus naar P_0 zoals te zien is in het bewijs van P_1. Ook kan je beredeneren dat geen enkele P_n een verschil van 1 heeft tussen de coördinaten om dezelfde reden en zelfs een verschil van 2 is onmogelijk.

We weten nu P_1. Hoe zit het nu met P_2? We weten al dat $a_2 > 3$ en $b_2 > a_2+2$ en $c_2 > b_2+2$ immers moeten alle coördinaten groter zijn dan 3 en alle verschillen groter dan 2. De eerste positie die hier aan voldoet is dus (4,7,10) met verschillen van 3 en an 1 groter dan 3. We zullen later ook zien dat deze positie correct is, maar we zullen ook zien dat de volgende P positie niet altijd voor de hand ligt.

Lemma 3.3. *De vereniging van alle a_n, b_n en c_n is heel $\mathbb{N}_0$*

Bewijs. Stel er zijn getallen die in geen enkele P-positie voorkomen. Neem dan n het eerste natuurlijke getal dat niet in een P-positie voorkomt. Dit betekend dat alle posities die n bevatten N-posities zijn. Maar al deze N-positie moeten dan een P-positie bereiken met als eerste, tweede of derde coördinaat een getal dat kleiner is dan n, immers n moet veranderd worden om het naar een P-positie te zetten.Claim: dan zijn er slechts eindig P-posities over. Om deze claim te bewijzen hoeven we alleen te bewijzen dat er slechts eindig veel P-posities met een willekeurige $m < n$ als coördinaat zijn. Duidelijk is dat al deze P-posities niet naar elkaar kunnen zetten en dat slechts 2 coördinaten kunnen worden veranderd. We zullen nu kijken naar posities met m als laagste coördinaat. de posities (m,b,c) en (m,b',c') kunnen alleen niet van de ene naar de ander worden gezet als $b > b'$ en $c < c'$ of andersom, daarnaast mag de positie nooit 2 dezelfde coördinaten bevatten anders kan het naar P_0 gezet worden. Dit zijn maar eindig P-posities want voor elke nieuwe P-positie moet je minstens 1 optellen bij de b en 1 aftrekken van de c of andersom. Dan kom je altijd bij de posities waar b=c en de positie waar m=b. Voor m als tweede coördinaat of derde coördinaat gaat het bewijs hetzelfde alleen is de ondergrens dan dat het eerste coördinaat 0 wordt. Daarmee is de claim bewezen. Dus er zijn maar eindig P-posities en dus eindig veel verschillen en getallen over welke in de Positie met n moeten zitten om naar een P-positie gezet te kunnen worden. Aangezien de verzameling alle posities van de vorm (n,n+q,n+2q) bevat met $q \in \mathbb{N}$ bevat, wat oneindig aantal posities zijn met oneidig veel verschillen en getallen kunnen al deze posities niet N-posities zijn en hebben we een tegenspraak. Dus er is geen enkel getal dat niet in minstens 1 P-positie zit. □

Aannames voor het volgende lemma: 1) de rij a_n is strikt stijgend, 2) $c_{i+1} - c_i \neq 1 \forall i$.

Lemma 3.4. *De verzameling van alle verschillen tussen de coördinaten die voorkomen in alle P_n: $D = \mathbb{N} \cup 0$*

Bewijs. Stel $D \neq \mathbb{N} \cup 0$. Het is duidelijk dat $D \subset \mathbb{N} \cup 0$, dus moet $D \not\supset \mathbb{N} \cup 0$ Dan is er dus een $d \in \mathbb{N} \cup 0$ waarvoor geldt $d \notin D$. Neem nu de miNimale m met $P_m(a_m, b_m, c_m)$ waarvoor geldt $b_m - a_m > d, c_m - b_m > d$ en dus ook $c_m - a_m > 2d + 1$ $[b_m - a_m \geq d+1, c_m - bm \geq d+1 \rightarrow c_m - a_m \geq 2d+2]$ we bekijken de posities Q(a,a+d,a+2d) en R(a,a+d+1,a+2d+1), Q en R zijn geen P-posities want ze bevatten het verschil d. Ze moeten dus een andere P_n bereiken met $n < m$. Duidelijk is dat Q en R niet naar P_m kunnen worden gezet, want je kunt de coördinaten alleen verlagen. Dus dan moeten (a+n of a+2n) en (a+n+1 of a+2n+1) coördinaten zijn in de tot nu toe gemaakte P_n. Daarnaast kunnen a+2n en a+2n+1 niet coördinaten zijn in P_n met $n < m$ want a is het hoogste 1e coördinaat tot nu toe en alle verschillen tussen de 1e en het 3e coördinaat $< 2n$ want P is de eerste met een verschil $> 2n$. Dus nu moeten a+n+1 en a+n in G, dit kunnen geen 2e coördinaten zijn omdat a het hoogste 1e coördinaat is en P de eerste P-positie met een verschil van $> n$. Het zijn dus beide 3e coördinaten maar dat kan niet want $c_{i+1} - c_i \neq 1 \forall i$ □

Lemma 3.5. *Als alle P_i gegeven zijn voor $i < n$ dan is P_n (de eerste niet gegeven P-positie) gelijk aan de lexicografisch kleinste in de verzameling posities $\{Q_n :$ er is geen zet mogelijk naar P_i voor $i < n\}$*

Bewijs. Neem aan dat we al P-posities P_i $i < n$ hebben gegenereerd en neem X de lexicografisch kleinste positie in de verzameling Q_n. Om te bewijzen dat dit de P-positie P_n is moeten we bewijzen dat X geen ongedefinieerde posities bereikt (posities waarvan nog niet duidelijk is of het een P-positie of N-positie is) en dat het geen P-posities bereikt, want als dat het geval is moet het alleen N-posities bereiken en is het dus de nieuwe P-positie. Duidelijk is dat het geen P-posities bereikt, want dan was het geen element van Q_n. Nu moeten we dus alleen nog bewijzen dat X geen andere ongedefinieerde posities bereikt alle ongedefinieerde posities zitten in Q_n. Omdat X de lexicografisch kleinste positie in Q_n is weten we dat alle andere elementen van Q_n een groter eerste coördinaat hebben, en/of een groter tweede coördinaat en/of een groter derde coördinaat. Als het eerste coördinaat groter is weet je zeker dat X het niet kan bereiken want je kunt coördinaten niet groter maken en het zelfde geldt als de andere coördinaten groter zijn. Dus X bereikt geen ongedefinieerde posities en is dus de nieuwe P-positie. □

Dit lemma is in zichzelf eigenlijk al een algoritme om P-posities te vinden op een eindig vlak, maar het is heel langzaam en vraagt veel computer kracht. in de kubus van 300 × 300 × 300 zijn bijvoorbeeld slechts 60 P-posities en al 4.545.100 posities om te checken. De P-posities die je dan vindt zijn:

	a_n	b_n	c_n	b_n-a_n	c_n-b_n	c_n-a_n		a_n	b_n	c_n	b_n-a_n	c_n-b_n	c_n-a_n
P_1	0	0	0	0	0	0	P_{31}	59	105	151	46	46	92
P_2	1	2	3	1	1	2	P_{32}	61	103	150	42	47	89
P_3	4	7	10	3	3	6	P_{33}	62	109	158	47	49	96
P_4	5	9	13	4	4	8	P_{34}	65	114	164	49	50	99
P_5	6	11	16	5	5	10	P_{35}	68	118	169	50	51	101
P_6	8	15	22	7	7	14	P_{36}	69	122	175	53	53	106
P_7	12	21	30	9	9	18	P_{37}	70	121	175	51	54	105
P_8	14	25	36	11	11	22	P_{38}	74	128	184	54	56	110
P_9	17	29	41	12	12	24	P_{39}	75	131	188	56	57	113
P_{10}	18	31	44	13	13	26	P_{40}	77	134	194	57	60	117
P_{11}	19	34	49	15	15	30	P_{41}	78	138	199	60	61	121
P_{12}	20	37	53	17	16	33	P_{42}	80	142	204	62	62	124
P_{13}	23	39	58	16	19	35	P_{43}	81	144	207	63	63	126
P_{14}	24	43	63	19	20	39	P_{44}	82	143	209	61	66	127
P_{15}	26	46	67	20	21	41	P_{45}	85	152	219	67	67	134
P_{16}	27	48	71	21	23	44	P_{46}	86	154	222	68	68	136
P_{17}	28	51	76	23	25	48	P_{47}	89	155	224	66	69	135
P_{18}	32	57	84	25	27	52	P_{48}	91	160	231	69	71	140
P_{19}	33	60	88	27	28	55	P_{49}	92	163	235	71	72	143
P_{20}	35	64	93	29	29	58	P_{50}	95	167	241	72	74	146
P_{21}	38	66	97	28	31	59	P_{51}	96	170	246	74	76	150
P_{22}	40	72	104	32	32	64	P_{52}	99	176	253	77	77	154
P_{23}	42	73	107	31	34	65	P_{53}	100	179	258	79	79	158
P_{24}	45	79	115	34	36	70	P_{54}	102	178	258	76	80	156
P_{25}	47	83	120	36	37	73	P_{55}	106	186	267	80	81	161
P_{26}	50	87	125	37	38	75	P_{56}	108	189	272	81	83	164
P_{27}	52	90	130	38	40	78	P_{57}	110	193	277	83	84	167
P_{28}	54	94	136	40	42	82	P_{58}	111	195	280	84	85	169
P_{29}	55	98	141	43	43	86	P_{59}	112	197	284	85	87	172
P_{30}	56	101	146	45	45	90	P_{60}	113	200	288	87	88	175

Figuur 3.1: De P-posities van Akiyama's Nim met getallen onder de 300. De rode boxen geven bijzondere gevallen aan waar de B-rij daalt en de C-rij ook daalt of gelijk blijft.

De aannames die we maakte in Lemma 3.4 blijken te kloppen voor de eerste 60 P-posities. En de volgende twee dingen die we nodig hebben voor een sneller algoritme lijken ook te kloppen:1) Als $P_i \neq P_j$ dan $a_i \neq a_j$ en 2) Als er een P_m is (a_m, b_m, c_m) met $b_m - a_m = d$ dan is er geen enkele andere P_n met $n > m$ die een verschil van d tussen coördinaten heeft. Wat wel opvalt is dat b_n en c_n niet strikt stijgend zijn zoals te zien is bij de met rode boxen aangegeven posities. Verder kunnen we de aanname maken dat de rijen a_n, b_n en c_n disjunct zijn zoals bij Wythoffs Nim.

Omdat het lemma een algoritme geeft wat erg langzaam is gaan we aan de hand ervan een algoritme schrijven dat sneller is, maar wel gebaseerd is op bepaalde aannames. Helaas zal dit algoritme niet mooi verwoord zijn doordat de b en c rijen niet strikt stijgend zijn. Dit zorgt er namelijk voor dat er verschillen gebruikt kunnen worden die al geweest zijn.
Aannames voor het algoritme:
1) Als $P_i \neq P_j$ dan $a_i \neq a_j$
2) Als er een P_m is (a_m, b_m, c_m) met $b_m - a_m = d$ dan is er geen enkele andere P_n met $n > m$ welke een verschil van d tussen coördinaten heeft.

Algoritme: Voor het algoritme moeten we eerst 4 verzamelingen definiëren.

$$G_n = \{g : g \in P_i, i < n\}$$

alle getallen die al zijn voorgekomen in P-posities.

$$Da_n = \{d : b_i - a_i = d, i < n\} \cup \{d : c_i - a_i = d, i < n\} \cup \{d : c_i - b_i = d, \forall i < n : a_n > b_i\}$$

alle verschillen die niet meer mogen voorkomen op de stap van a_n naar b_n en zo ook

$$Db_n = \{d : b_i - a_i = d, i < n\} \cup \{d : c_i - a_i = d, i < n\} \cup \{d : c_i - b_i = d, i < n\}$$

Alle verschillen die al zijn geweest en niet op de stap van a_n naar c_n en niet op de stap van b_n naar c_n mogen voorkomen.
Dan wordt het algoritme: neem een $N \in \mathbb{N}$ dan is $P_n = (a_n, b_n, c_n)$ met

$$a_n = mex(G_n)$$

$$b_n = mex(\{G\} \cup \{x < a_n + mex(Da_n), x \in \mathbb{N}\})$$

$$c_n = b_n + mex(Db_n)$$

Ga door met dit algoritme zolang $c_n \leq N$

Uitleg van het algoritme: We weten al P_0 en P_1 door lemma 3.2. Omdat het vlak waarop we kijken eindig is kunnen we lemma 3.5 gebruiken in de constructie van het algoritme. Dus het algoritme moet de lexicografisch kleinste positie vinden uit de verzameling Q_n. $\{Q_n$: er is geen zet mogelijk naar P_i voor $i < n\}$. Dus moet $a_n = mex(G_n)$ want je moet a_n onafhankelijk van de andere twee zo klein mogelijk kiezen en alle mogelijke getallen kleiner dan $mex(G_n)$ zijn al gedefinieerd(Aanname 1) en zitten dus niet in Q_n.
Nu moet het algoritme het kleinst mogelijke tweede coördinaat vinden. We weten dat er geen verschil uit $\{d : b_i - a_i = d, i < n\}$ gebruikt mag worden (Aanname 2), er mag ook geen verschil uit $\{d : c_i - a_i = d, i < n\}$ gebruikt worden want dan kan de nieuwe P-positie gezet worden naar de P-positie die het verschil in $\{d : c_i - a_i = d, i < n\}$ bracht, want $a_n > a_i$ voor alle $i < n$ en dus is b_n ook groter dan de c_i die erbij hoort en $c_n > b_i$. Verschillen uit $\{d : c_i - b_i = d\}$ moeten wat voorzichtiger worden uitgesloten want ze kunnen alleen worden uitgesloten als $a_n > b_i$ van de P_i die het verschil gebruikte, dus die conditie zit in de verzameling. Daarnaast mag b_n niet in G_n zitten anders kan b_n gelijk gehouden worden om op een vorige P-positie uit te komen.
Voor het derde coördinaat hoeft er alleen naar het verschil $c_n - b_n$ worden gekeken en niet meer naar G_n. c_n is immers groter dan alle a_i en b_i en een getal kan twee keer als c_i voorkomen zie figuur 3.1. Alle verschillen die al geweest zijn, zijn bereikbaar en moeten worden uitgesloten. Als we dus de mex van alle voorgekomen verschillen nemen komen we net als voor het tweede coördinaat uit op een zo klein mogelijk verschil. Daardoor vindt het algoritme altijd de P-positie die we volgens lemma 3.5 moeten vinden.

Voorbeeld: P-posities tot aan de eerste fout, om aan te geven waarom er in het algoritme met zoveel rekening moet worden gehouden.

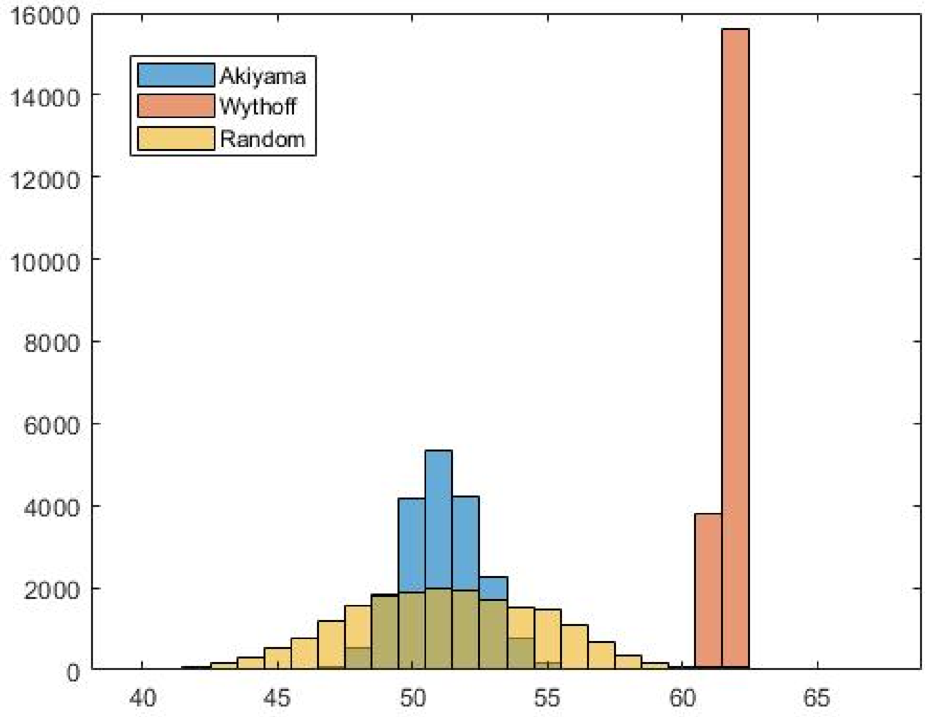
1e	2e	3e	verschillen
0	0	0	0
1	2	3	1,2
4	7	10	3,6
5	9	13	4,8
6	11	16	5,10
8	15	22	7,14
12	21	30	9,18
14	25	36	11,22
17	29	41	12,24
18	31	44	13,26
19	34	49	15,30
20	37	53	16,17,33
23	39	58	16,19,35

Op de plek van de 37 wilden we een 36 invullen om de mex(Da_n) te gebruiken maar dit was niet mogelijk omdat 36 al in G_n zat dus $b_n = 37$. Voor het 3e coördinaat werd de mex(Db_n) = 16 en werd gebruikt. Dit zorgt ervoor dat de verschillen de-synchroniseren en er veel vaker 3 verschillen worden gebruikt.

3.2. Analyse van de A-rij

Met het algoritme kunnen we een groot deel van de A-rij van Akiyama's Nim bekijken. Aangezien er veel haken en ogen aan het spel zitten gaan we kijken naar het verschil tussen de A-rij van Akiyama's spel en de A-rij van Wythoffs spel. Als in deze sectie een Rij wordt genoemd (Wythoffsrij, Akiyama's rij of Randomrij) wordt daar mee bedoelt de rij van nullen en enen met op een positie een 1 als de index van die positie een getal in de A-rij is van het betreffende spel en een nul anderzijds.

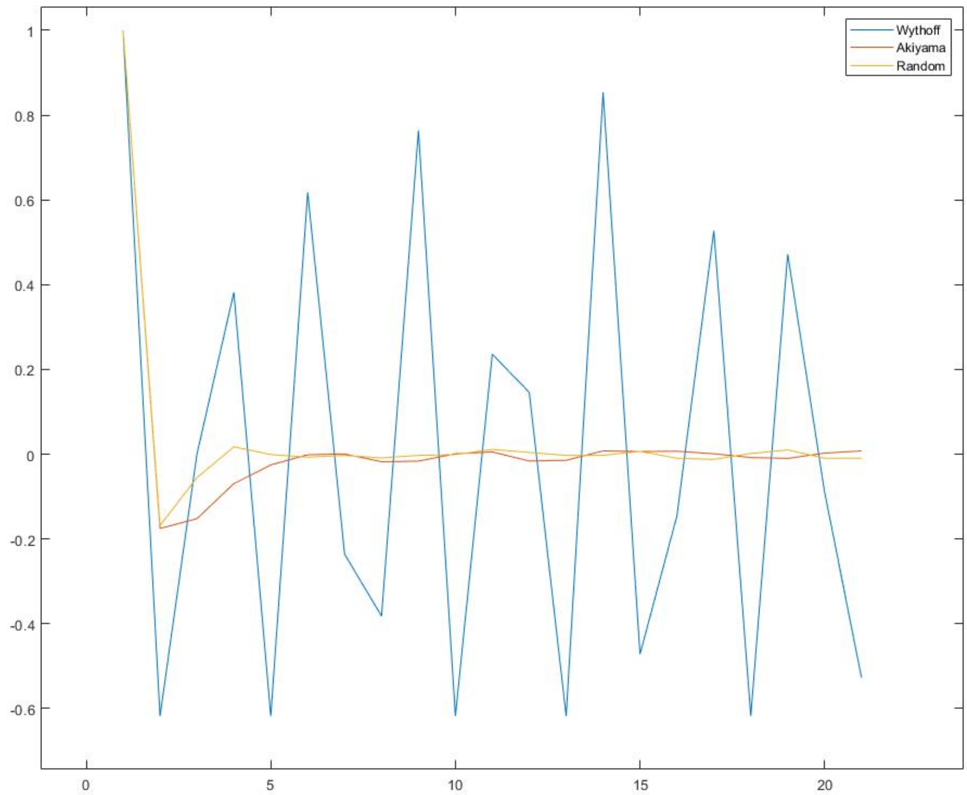
Allereerst hebben we gekeken naar de frequentie van getallen die voorkomen op de A-rij. Om dit te doen hebben we in elke 100 getallen gekeken hoeveel daarvan voorkomen in de A-rij, dus eerst in de getallen 1 t/m 100 daarna 2 t/m 101 enz. dat levert het volgende plaatje op.



Figuur 3.2: Vergelijking in frequentie van Natuurlijke getallen in de A-rij

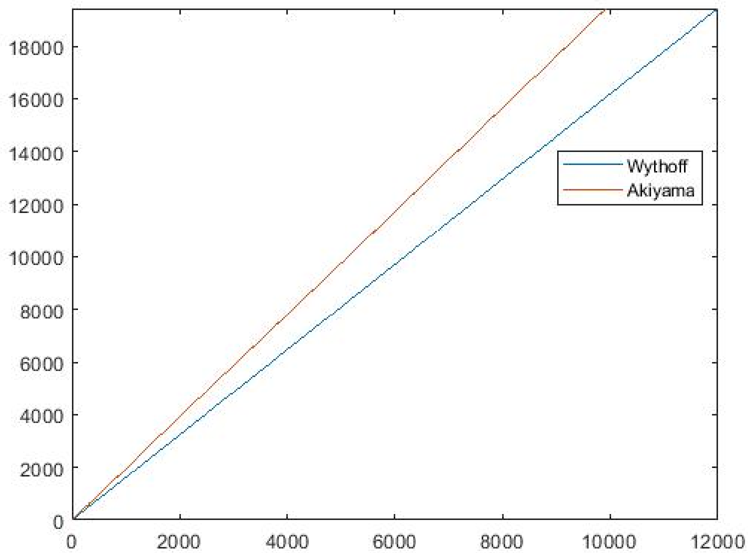
De Randomrij in deze sectie is een rij van getallen met de zelfde afstandsverdeling als de afstandsverdeling van de A-rij van Akiyama maar verder wel random. Uiteraard komen er meer getallen voor in de A rij van Wythoffsspel aangezien daar de Natuurlijke getallen slechts over 2 rijen worden verdeeld. We zien ook 1 van de bijzondere eigenschappen van de Wythoffrij terug, er zijn slechts 2 mogelijke aantallen getallen in het interval van 100 dit is al bewezen in Stelling 1.4(1) van hoofdstuk 1. We zien dat de Randomrij een veel grotere spreiding heeft dan Akiyama's rij wat we ook verwachten aangezien er een verband bestaat tussen de getallen in Akiyama's rij die niet aanwezig is in de Randomrij. Maar daarmee kunnen we nog niet echt concluderen dat Akiyama's rij meer lijkt op de Wythoffrij dan de Randomrij.

Voor verdere vergelijking kijken we naar de autocorrelatie van de rijen. Hierbij wordt er gekeken hoeveel een rij op zichzelf lijkt als de rij wordt verschoven. Een 1 betekend dat de rijen exact hetzelfde zijn en een 0 dat ze geen enkele correlatie hebben en -1 dat de rij exact het tegenovergestelde is. Dit levert het volgende plaatje op.



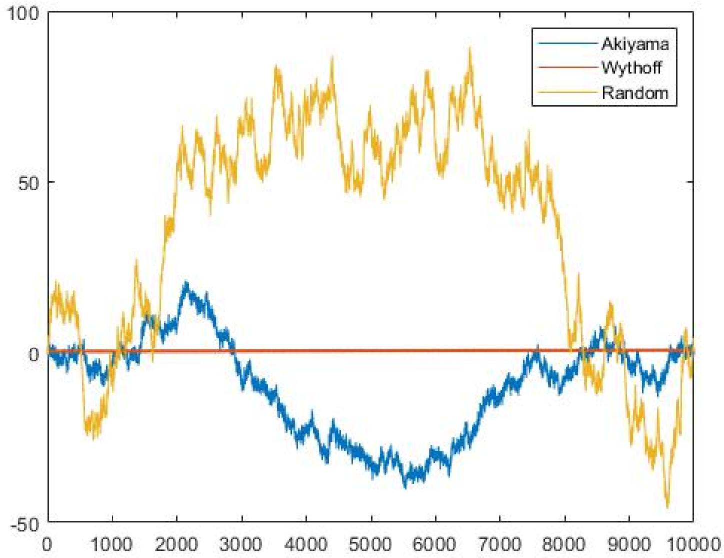
Figuur 3.3: Vergelijking in Autocorrelatie

Hierin kunnen we zien dat de Wythoffrij op veel intervallen grote overeenkomsten vertoont of juist tegenovergestelde overeenkomsten. Als dit ook het geval was bij Akiyama's rij hadden we hoop gehad op een makkelijk zichtbaar patroon, maar die heeft na 5 verschuivingen nagenoeg geen correlatie meer net als de Randomrij waarbij je dit verwacht, immers hebben die getallen ook niks met elkaar te maken. In deze vergelijking lijkt Akiyama's rij niet specialer dan de nagenoeg random selectie nullen en enen van de Randomrij. Daarom moeten we toch meer vergelijkingen doen. Het verloop van de A-rij is dit:



Figuur 3.4: Plot van de A-rijen

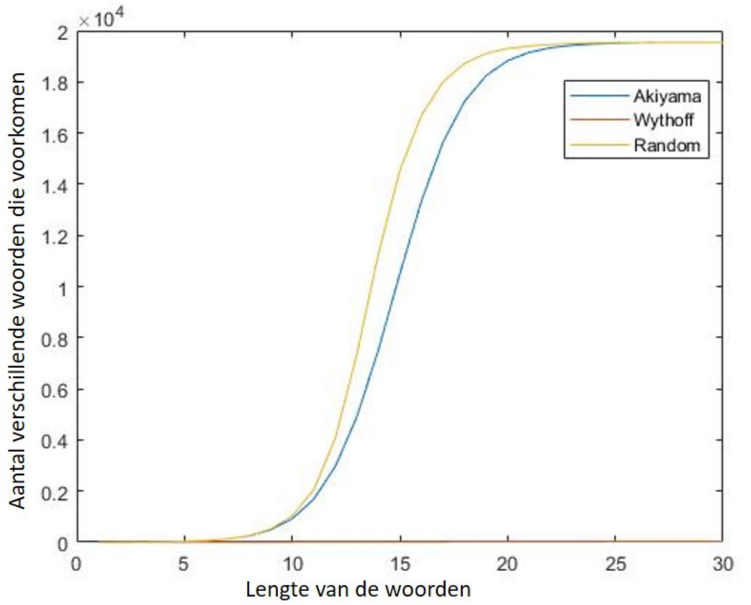
Om beter te begrijpen waarom deze rechte lijnen niet op elkaar lijken kijken we naar de afwijking die ze hebben met de perfecte rechte lijn die het meest lijkt op de lijn die ze afleggen, hierbij nemen we ook weer een Randomrij mee om mee te vergelijken.



Figuur 3.5: vergelijking in de afwijking van de rij tov een rechte lijn

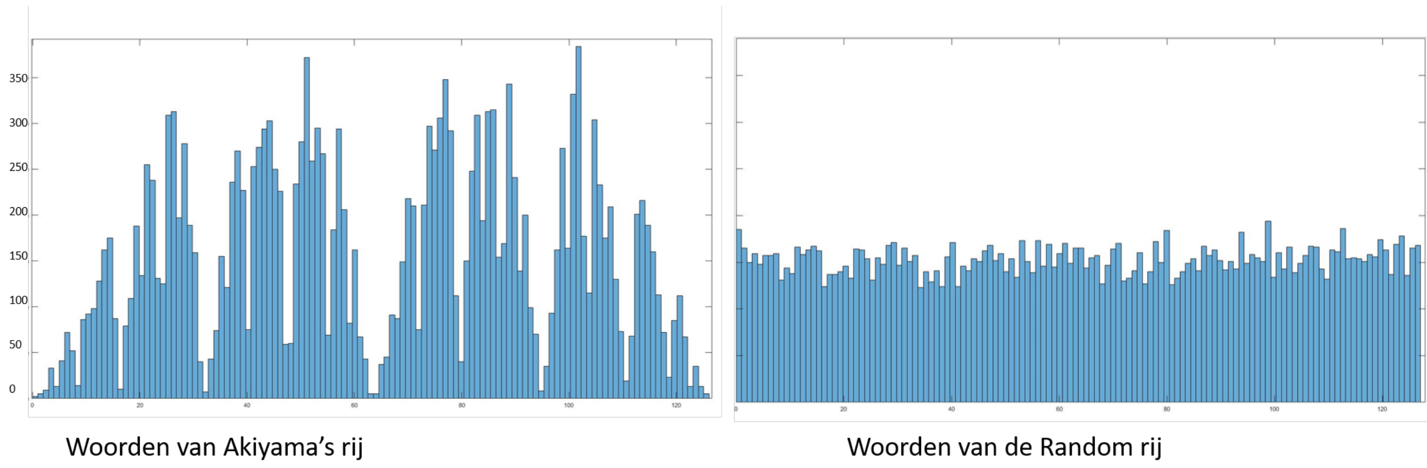
Akiyama's rij en de Wythoffrij zijn hier bijna niet te vergelijken: de Wythoffrij heeft een afwijking die altijd tussen de 1 en -1 valt, terwijl Akiyama's rij een piek heeft van ongeveer -40. Dit is weer een vergelijking waar Akiyama's rij meer op de Randomrij lijkt dan op de Wythoffrij die het probeerde te evenaren. Hieruit kunnen we gelukkig wel weer zien dat de rij wel degelijk meer geordend is, al is het niet heel veel.

Als laatste vergelijking kijken we naar het aantal woorden dat de rijen hebben daarmee bedoelen we dat we kijken naar een bepaalde lengte en tellen we het verschillende aantal mogelijkheden die voorkomen in de rij. In de rij 010101010.... komen bijvoorbeeld maar 2 woorden van lengte 2 voor: 01 en 10.



Figuur 3.6: vergelijking in het aantal woorden voor verschillende lengtes

In dit plaatje ligt de Wythoffrij onderin op de lijn y=x+1 zoals uitgelegd in hoofdstuk 1 Stelling 1.4.(2). Verder komt de afplatting van de grafiek door het gebrek aan rekenvermogen, we verwachten dat zowel de random rij als Akiyama's rij door gaan met exponentieel stijgen. hieruit zou je willen concluderen dat Akiyama's rij bijna de Randomrij is in deze vergelijking, maar dat zou misleidend zijn, want dit plaatje kijkt alleen naar het aantal verschillende woorden en niet naar hoe vaak die vervolgens voorkomen, als je daar naar kijkt krijg je:



Figuur 3.7: vergelijking in de frequentie van woorden van lengte 7

Hierbij is elk woord omgezet in zijn binaire getal dus bij het woord 0000000 hoort het eerste balkje en bij 1111111 de 128ste. In dit plaatje kan je goed zien dat er duidelijk een stuk meer structuur zit in Akiyama's rij en dat het in de verste verte niet lijkt op de Randomrij die we gegenereerd hebben.

3.3. Conclusie/Discussie

Het is niet gelukt om een mooie structuur te vinden in de A-rij van Akiyama, dit is ook goed te verklaren met de verschillen die zijn vergeleken in dit hoofdstuk. Daaruit kunnen we concluderen dat er waarschijnlijk niet een mooie structuur bestaat, maar het zou ook kunnen dat er alsnog een structuur in zit die veel dieper verborgen zit. Het laatste plaatje laat immers wel zien dat er veel scherpen pieken zijn bij sommige woorden en dat er woorden zijn die nagenoeg niet voorkomen, dit zou erop kunnen wijzen dat de rij uiteindelijk zal stabiliseren als je ver genoeg kijkt en woorden van grotere lengtes bekijkt. Het is misschien interessanter om te kijken naar een betere generalisatie van Wythoff voor 3 stapels die wel de mooie patronen van Wythoff geeft bijvoorbeeld het Tribonacci spel.